Table des matières

1 Rappels et préliminaires **1**

1.1 Notations et notions générales 1

1.2 Quelques espaces fonctionnels 3

1.2.1 Espace de Banach 3

1.2.2 Espace de Hilbert 3

1.2.3 Espace réflexif 4

1.2.4 Espace compact 4

1.2.5 Espace précompact 4

1.3 Notions et théorèmes de base 4

1.3.1 Densité 4

1.3.2 Opérateurs 4

1.3.3 Fonction lipschitzienne 6

1.4 Théorèmes et formules fondamentaux 7

1.4.1 Formule de Green 7

1.4.2 Quelques inégalités 7

1.4.3 Principe du maximum 8

1.4.4 Théorème de comparaison pour les équations non linéaires 9

1.4.5 Formes quadratiques 10

1.5 Semi-groupe et générateur infinitésimal 11

1.5.1 Semi-groupe 11

1.5.2 Semi-groupe analytique 11

1.5.3 générateur infinitésimal 11

1.6 Notion de l'existence locale et globale 12

1.6.1 Existence locale et unicité 12

1.6.2 Existence globale 13

2 Applications de quelques équations d'évolution et quelques systèmes de réaction diffusion 17

2.1 Topologie du modèle 17
2.1.1 Du modèle vers le réel 17
2.1.2 Du réel vers le modèle 17
2.2 Comment créer un modèle mathématique 18
2.3 Modélisation en quelques équations d'évolution 18
2.3.1 Exemple de modélisation du transfert de la chaleur dans une tige 18
2.3.2 Exemple d'équation d'un produit dans un parallélépipède 20
2.4 Modélisation en quelques systèmes de réaction diffusion 23
2.4.1 Environnement 23
2.4.2 En chimie 23

3 Existence de solutions de quelques équations d'évolution 25

3.1 Cas d'un espace de Hilbert 25
3.1.1 Problème homogène 25
3.2 Cas d'un espace de Banach 26
3.2.1 Problème linéaire 26
3.2.2 Problème semi-linéaire 30
3.3 Cas particulier : équation de la chaleur semi-linéaire 32
3.3.1 Existence locale 33
3.3.2 Existence globale 34

4 Existence globales de solutions pour quelques systèmes de réaction-diffusion 36

4.1 Existence globale de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion à matrice diagonale 36
4.1.1 Existence locale et positivité de solutions 37
4.1.2 Existence globale de solutions 38
4.2 Existence globale de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion à matrice triangulaire 40
4.2.1 Existence locale et positivité de solutions 41
4.2.2 Existence globale de solutions 43
4.3 Existence globale de solutions pour des systèmes de Réaction-diffusion à matrice pleine 47

4.3.1 Existence Locale et positivité de solutions 48
4.3.2 Existence Globale 48

5 Comportement asymptotique de solutions **59**
5.1 Comportement asymptotique de solutions pour quelques équations d'évolution . . 59
5.1.1 Exemple d'explosion en temps fini 59
5.2 Comportement asymptotique de solutions pour quelques systèmes de réaction-diffusion 63
5.2.1 Exemple d'un système à matrice diagonale 63
5.2.2 Exemple d'un système à matrice triangulaire 67

Liste de figures

Figure N°	Titre	Page
1	Schématisation du transfert de chaleur.	18
2	Schématisation d'un produit dans un parallépipède	20
3	Schématisation d'un produit dans les directions O_y et O_z	21

Notations et Symboles

Ω	Domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	La frontière.
$d\sigma$	La mesure de surface sur Γ.
∇u	Le gradient de u.
$\nabla.u$	La divergence de u.
Δu	Le laplacien de u.
$\|u\|$	La norme de u.
$\frac{du}{dt}$	La dérivée normale de u.
$\frac{\partial u}{\partial t}$	La dérivée partielle de u.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	La dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$.
$S.R.D$	Système de réaction diffusion.
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions tests.
$\mathcal{L}(E,F)$	L'espace des opérateurs linéaires et continus.
$\|\Omega\|$	$mes(\Omega)$.
B_M	La boule de centre 0 et de rayon M.
$L(u,v)$	Fonction de Lyapunov.
$T(\nabla u, \nabla v)$	Forme quadratique.
$\sum$	Région invariant

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de solutions d'équations d'évolution et quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles appelée **Systèmes de réaction-diffusion**. Ces qui sont une modélisation de certains phénomènes dans la nature.
Le plus important dans ce travail est l'étude de l'existence globale en temps et le comportement asymptotique des solutions d'une classe de **S.R.D** du type parabolique suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u),$$

où $(u_1(t,x),...,u_n(t,x))$ est un vecteur de variable indépendantes, et l'inconnue
$f(x,t,u(t,x)) = (f_1(x,t,u(t,x)),..,f_n(x,t,u(t,x)))$ est le terme de réaction diffusion, en générale f est non linéaire, et D est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion.
Ce travail est réparti en cinq chapitres essentiels.
Au chapitre 01 : (**Rappels et préliminaires**)
Ce chapitre se compose de deux sections, nous présentons dans la première section des notations, quelques symboles, certains opérateurs et quelques espaces avec leurs normes utilisées dans ce travail, la deuxième section c'est un rappel sur quelques théorèmes fondamentaux, théorie de semi-groupes et les propriétés de solutions (existence locale, existence globale, explose en temps fini) et finalement nous présentons les techniques utilisées dans ce travail.
Au chapitre 02 : (Applications de quelques équations d'évolution et quelques systèmes de réaction diffusion)
Dans ce chapitre nous présentons quelques modèles d'équations d'évolution et quelques systèmes de **R.D.**
Pour les équations, nous choisissons premièrement un exemple de transfert de la chaleur dans une tige, et deuxièment un exemple d'équation d'un produit dans un parallélépipède en **1D**.
Pour les systèmes, nous choisissons un exemple en **environnement** (proie-prédateur) et un exemple en **chimie** (H_2O).
Au chapitre 03 : (Existence de solutions des équations d'évolution)
Dans ce chapitre nous présentons quelques théorèmes fondamentaux d'existence et l'unicité des équations d'évolution du type parabolique dans le cas d'un espace de **Hilbert,** et le cas d'un espace de **Banach** et finalement au titre d'un cas particulier, on étudie l'existence locale et globale de solutions d'équation de la chaleur.
Au chapitre 04 : (Existence globale de solutions des quelques systèmes de R.D)

Nous intéressons à l'étude d'existence globale de quelques **S.R.D** (2×2). Nous utilisons la méthode de l'effet régularisant qui est basée sur des fonctionnelles de Lyapunov.
Pour le système à matrice diagonale nous choisissons une fonctionnelle de Lyapunov à croissance exponentielle, dans le cas de système à matrice triangulaire nous choisissons un cas d'une fonctionnelle de Lyapunov à croissance exponentielle et polynomiale, tandis que dans le cas de système à matrice pleine nous choisissons une fonctionnelle de Lyapunov à croissance polynomiale.

Au chapitre 05 : (Comportement asymptotique de solutions)

Dans ce chapitre nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique des solutions d'une équation d'évolution et quelques systèmes de **R.D.**

Dans le cas **d'équation** nous étudions un cas d'explose en temps fini.

Dans le cas **de systèmes** nous étudions le cas quand $\underset{t\to\infty}{u \to} (k_1, k_2)$.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle de quelques définitions, espaces fonctionnels de base (espace de Banach, esp
quelques théorèmes fondamentaux (principe du maximum, formes quadratiques...), ainsi que la
définition de semi-groupe et générateur infinitésimal
L'objectif de ce chapitre est l'utilisation des résultats préliminaires dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Notations et notions générales

Dans cette section nous avons défini quelque différents symboles, certains opérateurs (avec leurs normes), et les espaces utilisés dans notre travail comme suit
Ω un domaine borné inclus dans $\mathbb{R}^n$, avec frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ et $d\sigma$ est une mesure de surface sur Γ.
Le gradient d'une fonction u est défini par

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \text{ alors } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2. \ [14] \tag{1.1}$$

La divergence d'une fonction est également définie par

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \ [14] \tag{1.2}$$

Le laplacien de u

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \ [14] \tag{1.3}$$

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire : $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \vec{\eta}$, où $\vec{\eta}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ. [14]

$\mathcal{C}^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continues dans Ω. [24]

$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$, à support compact dans Ω. [24]

L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ que nous noterons également $D(\Omega)$, s'appelle l'espace des fonctions tests sur Ω. [24]

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires et continue (ou bornés) de E dans F muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in \mathbb{Z}, \|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F . \ [4] \tag{1.4}$$

On pose $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(E)$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable} : \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty, \ 1 \leq p < \infty \right\}, \ [14]$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} . \ [14] \tag{1.5}$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable } \exists C^{ste} \text{ et } |u| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}, \ [14]$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C, \ |u| \leq C \quad \text{p.p. sur } \Omega \} . \ [14] \tag{1.6}$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega, \ 1 \leq i \leq n \right\},$$

W est l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} . \ [14] \tag{1.7}$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega). \ [14]$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u/\Gamma = 0 \right\}. \ [14] \tag{1.8}$$

On définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ au sens des distributions par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m \right\}, \ m \in \mathbb{N}, \ m \geq 1. \ [2] \tag{1.9}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m}^{n} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < +\infty. \ [2] \tag{1.10}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega). \ [2] \tag{1.11}$$

A noter que si $Q_T = \Omega \times [0,T]$ (problème d'évolution), on peut introduire l'espace important dans notre travail $L^\infty(0,T,L^p(\Omega))$ comme suit

$$L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) = \{u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable : } \sup \|u\|_{L^p} < \infty\}. \ [4]$$

D'autre terme

$$u \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) \Longleftrightarrow \sup_{t \in (0,T)} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \ [4]$$

On note que

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|. \ [19]$$

1.2 Quelques espaces fonctionnels

1.2.1 Espace de Banach

Définition 1.1 [30] *On appelle espace de Banach tout espace normé complet pour la distance associée à la norme.*

1.2.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2 [30] *On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.*
On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire.

1.2.3 Espace réflexif

Théorème 1.1 [20] *Un espace de Banach est réflexif si est seulement si sa boule unité fermé est compacte pour la topologie faible (la topologie la moins fine c.à.d. celle avec le moins d'ouverts).*

1.2.4 Espace compact

Proposition 1.1 [14] *Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$. Alors K est compact si et seulement si K est une partie fermée et bornée.*

1.2.5 Espace précompact

Définition 1.3 [25] *Un espace métrique E est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de points x_i, $i = 1, \cdots, N$, (N dépend de ε) tel que*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon),$$

où pour tout $x \in E$, $B(x, \rho)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon $\rho > 0$.

Remarque 1.1 [25] *Tout espace compact est évidement précompact.*

Proposition 1.2 [25] *Tout espace métrique précompact et complet est compact.*

1.3 Notions et théorèmes de base

1.3.1 Densité

Définition 1.4 [30] *Soit E un espace métrique. Une partie A de E est dite dense dans E si on a $\overline{A} = E$.*

Exemple 1.1 [30] *L'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense de $\mathcal{M}_d(\mathbb{k})$.*

1.3.2 Opérateurs

Soit H et H' deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.5 [10] *Toute application linéaire et continu $T : H \longrightarrow H'$ s'appel un opérateur.*

Opérateurs bornés

Définition 1.6 [10] *Soit $A : X \to Y$ un opérateur, A est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|Au\| \leq C \|u\|, \ \forall u \in X.$$

Opérateurs symétrique

Définition 1.7 [12] *L'opérateur $A : H \to H$ est dit symétrique si $\forall u, v \in D(A) \subset H$, $(Au, v) = (v, Au)$.*

Opérateurs adjoint

Définition 1.8 [11] *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné à domaine dense. Il existe un unique opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ appelé adjoint de A qui vérifie*

$$\forall u \in D(A), \ \forall v \in D(A^*), \ \ (v, Au)_{F',F} = (A^* v, u)_{E',E},$$

où

$$D(A^*) = \{v \in F', \ \exists c \geq 0, \ \ |(v, Au)| < c \, |u|_E \ \ \forall u \in D(A)\}.$$

Remarque 1.2 [14] *A autoadjoint si*

$$A^* = A.$$

Ce qui sous-entend $D(A) = D(A^*)$.

Opérateur compact

Définition 1.9 [10] *Soit $A : X \to Y$ un opérateur, A est dit compact si l'image de la boule unité de X par A est relativement compacte pour la topologie forte.*

Opérateur monotone

Définition 1.10 [14] *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire **non-borné**. On dit que A est **monotone** (certains auteurs disent que A est **accrétif** ou que $-A$ est **dissipatif**) si*

$$(Av, v) \geq 0, \ \forall v \in D(A).$$

*A est **maximale monotone** si de plus $R(I + A) = H$ i.e.*

$$\forall f \in H, \ \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.11 [17] *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0,\ \ \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 1.12 [17] *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est m-dissipatif si*
· A est dissipatif,
· $\forall f \in X, \forall \lambda > 0$, $\exists x \in D(A)$ tel que $\lambda x - Ax = f$.

Graphe de A

Définition 1.13 [12] *Le graphe de A ($A : H \to H,$ et $D(A) \subset H$) est le sous-espace vectoriel de $E \times F$ noté par $G(A)$ défini par*

$$G(A) = \{(x, Ax),\ x \in D(A)\}.$$

Définition 1.14 [14] *On dit qu'un opérateur A est **fermé** si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

1.3.3 Fonction lipschitzienne

Définition 1.15 [12] *On dit qu'une fonction f $E \to E$ est **lipschitzienne sur les bornés** de E si, pour tout $r > 0$, il existe une constante notée M_r telle*

$$\forall x_1,\ x_2 \in B(0, r),\ \ \|f(x_1) - f(x_2)\|_E \leq M_r \|x_1 - x_2\|_E.$$

Fonction localement lipschitzienne

Définition 1.16 [25] *On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à x si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) et une constante $L(t_0, x_0) \geq 0$ tels que*

$$\forall (t, x_1) \in \mathcal{V},\ \forall (t, x_2) \in \mathcal{V},\ \ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq L(t_0, y_0) \|x_1 - x_2\|_E.$$

Remarque 1.3 [25] *Si une fonction f est continûment différentiable, alors elle est localement lipschitzienne.*

Fonction globalement lipschitzienne

Définition 1.17 [25] *On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à x s'il existe $L > 0$ telle que*

$$\forall x_1,\ x_2 \in D,\ \forall t \in I,\ \ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq L \|x_1 - x_2\|_E.$$

1.4 Théorèmes et formules fondamentaux

Nous rappelons ci-dessous quelques théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour l'étude des équations d'évolution.

Soit S une surface, frontière d'un domaine de volume V. Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieur du domaine à l'extérieur. Alors, si A_1, A_2 et A_3 sont des fonctions continues dans le domaine, le théorème de la divergence s'exprime ainsi

Théorème 1.2 ***(Théorème d'Ostrogradsky ou théorème de la divergence)***

$$\int_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \int_S A_1 dxdz + A_2 dzdx + A_3 dxdy, \tag{1.12}$$

sous forme vectorielle avec $A = (A_1, A_2, A_3)$, ceci peut s'écrire simplement

$$\int_V \nabla \cdot A dV = \int_S A \cdot \eta dS. \tag{1.13}$$

Preuve. Voir M. R. Spiegel [20]. ■

Remarque 1.4 [20] *Le théorème **(1.2)** est appelé encore théorème de Green dans l'espace.*

1.4.1 Formule de Green

Corollaire 1.1 *Soit Ω un ouvert bornée de classe C^1. Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$ on a*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx, \tag{1.14}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u(x) . \eta(x)$ (dérivée normale de u).

Preuve. Voir A. Munnir[2, pg. 33]. ■

1.4.2 Quelques inégalités

Lemme 1.1 **(Inégalité de Granwal)**

Soit $T > 0$ et soient φ et v dans $L^1(]0, T[, \mathbb{R}_+)$ telles que le produit φv soit aussi dans $L^1(]0, T[, \mathbb{R}_+)$. S'il existe c_1 et c_2 deux constantes strictement positive

$$v(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \varphi(s)\, v(s)\, ds,$$

alors

$$v(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \varphi(s)\, ds\right).$$

Preuve. Voir E. Dumos et R. Joly [9, $pg.$ 33]. ■

Lemme 1.2 ***(Inégalité de Hölder)***
[29] *Soient* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *et* $1 \leq p < \infty$, $1 < p' \leq \infty$. *Alors*

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

1.4.3 Principe du maximum

[14] Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Théorème 1.3 [14] *Soit* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et soit* u *la solution du problème (1.15), alors on a*

$$\{0,\ \inf u_0\} \leq u(t,x) \leq \max\{0,\ \sup u_0\}, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{1.16}$$

Preuve. [14] (Méthode des troncatures de stampachia).
Soit $K = \max\{0,\ \sup u_0\}$, supposé $K < +\infty$. Montrons que $u \leq K$ p.p. sur $[0,T[\times \Omega$. On fixe une fonction $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que
(i) $G(t)$ strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
(ii) $G(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0]$.
On pose

$$H(s) = \int_0^s G(\sigma) d\sigma,\ s \in \mathbb{R}.$$

Enfin on introduit la fonction

$$\Phi(t) = \int_\Omega H(u(x,t) - K) dx.$$

On démontre aisément que Φ a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \Phi &\in C([0, +\infty[, \mathbb{R}), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi \geq 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[. \\ \Phi &\in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi^{'}(t) &= \int_{\Omega} G(u(x,t)-K)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \int_{\Omega} G(u(x,t)-K)\Delta u(x,t)dx \\ &= -\int_{\Omega} G'(u(x,t)-K)\left|\nabla u(x,t)\right|^2 dx \leq 0,\end{aligned}$$

car $G(u(x,t)-K) \in H_0^1(\Omega)$ pour $t>0$.
Il en résulte que $\Phi^{'}(t) \leq 0$ sur $]0,+\infty[$ et par conséquent $\Phi \equiv 0$. Donc, pour chaque $t>0$, $u(x,t) \leq K$ p.p. sur Ω. ■
Considérons maintenant le problème non homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -f(u) & \text{sur } [0,T[\times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } [0,T[\times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{1.17}$$

Où $f \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.4 *Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et soit u la solution du problème (1.17) (puisque $f(u) \geq 0\ \forall u \geq 0$, (i.e.) ($\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0$)*
(**i**) *Si $u_0 \geq 0$ p.p. sur $\Omega \times]0,+\infty[$.*
(**ii**) *Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.*

Preuve. Voir H. Brezis [14]. ■

1.4.4 Théorème de comparaison pour les équations non linéaires

Nous considérons les premières équations paraboliques non linéaires

$$Pu = f(x,t,u),\ (x,t) \in \mathcal{D}, \tag{1.18}$$

où $\mathcal{D} = \Omega \times (0,T)$ est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, avec $\partial\Omega$ régulier.
Ici

$$-Pu = u_t - Au \equiv u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j}, \tag{1.19}$$

où (a_{ij}) est une matrice symétrique, et chaque a_{ij} est bornée dans $\mathcal{D}$. En outre, nous supposons que P est parabolique uniformément dans $\mathcal{D}$. Enfin, nous supposons que f est de classe C^1 par rapport à u et a support continu par rapport à x et t.

Soient u et v des fonctions de x dans Ω et des fonctions de t de classe C^1 sur $[0,T]$, nous considérons les trois conditions suivantes

$$\begin{cases} Pu - f(x,t,u) \leq Pv - f(x,t,v) & (x,t) \in \mathcal{D}, \\ u(x,0) \geq v(x,0) & x \in \Omega, \\ \frac{du}{d\nu} + \beta u \geq \frac{dv}{d\nu} + \beta v & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{1.20}$$

Où $\beta = \beta(x,t) \geq 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T)$, et ν est toute direction vers l'extérieur. En supposant que ces conditions, nous avons la théorème de comparaison suivant. [18]

Théorème 1.5 *Par les conditions ci-dessus sur P et f, si (1.20) satisfait, alors $u(x,t) \geq v(x,t)$ pour tous $(x,t) \in \mathcal{D}$. En outre, si $u(x,0) > v(x,0)$ pour chaque x dans un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, alors $u(x,t) > v(x,t)$ dans $\overline{\Omega}_1 \times [0,T]$.*

Preuve. Voir J. Smaller [18, $pg.$ 94]. ■

1.4.5 Formes quadratiques

Définition 1.18 [13] *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré.*
Une forme quadratique par rapport aux n variables u_1, u_2, ..., u_n peut être représentée par

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j, \tag{1.21}$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n},$$

est une matrice symétrique.
Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ par u et la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$ par $A(u,u)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A(u,u) &= u^t A u \\ &= Au \cdot u. \end{aligned}$$

Définition 1.19 [13] *La forme quadratique $A(u,u)$ est dite définie positive si*

$$A(u,u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, \ u \neq 0. \tag{1.22}$$

Théorème 1.6 *Une forme quadratique $A(u,u)$ est définie positive si et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs.*

Preuve. Pour démontrer ce théorème **Voir** F. R. Gantmacher [13, $pg.$ 306]. ■

1.5 Semi-groupe et générateur infinitésimal

1.5.1 Semi-groupe

Définition 1.20 [17] *Soit X un espace de Banach, alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe si les conditions suivantes sont satisfaisantes*

a) $S(0) = I$.

b) $S(t)S(s) = S(t+s)$, *pour tout* t *et* $s \geq 0$.

Définition 1.21 [17] *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit*

(i) **Uniformément continu** si $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)u - u\| = 0$ dans X, pour tout $u \in X$.
(ii) **Fortement continu** ou de **classe** C_0 si $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u, \forall u \in X$.
(iii) **Semi-groupe de contraction** s'il est de classe C_0 et $\|S(t)\| \leq 1$.

Théorème 1.7 [17] *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X, alors il existe deux constantes $M \geq 1$, $w \geq 0$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

1.5.2 Semi-groupe analytique

Définition 1.22 [3] *Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$, et pour tout $z \in \Delta$, soit $S(z)$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach X.*
(i) *La famille $S(z)$, $z \in \Delta$ est un semi groupe analytique sur Δ.*
(ii) *$S(o) = I$ et $\lim_{z\in\Delta,\, z\to 0} S(z)\, u_0 = u_0$ pour tout $u_0 \in X$.*
(iii) *$S(z_1)\, S(z_2) = S(z_1 + z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \Delta$.*
Un semi-groupe est appelé analytique s'il est analytique sur un certain secteur $\Delta \subset \mathbb{C}$ contenant le demi axe réel positif.
Il est clair que la restriction d'un semi-groupe analytique à l'axe réel est un semi-groupe continu.

1.5.3 générateur infinitésimal

Définition 1.23 [17] *L'opérateur linéaire non borné A défini par*

$$Au = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)u - u}{t}, \text{ pour tout } u \in D(A), \tag{1.23}$$

où

$$D(A) = \{u \in X \text{ tel que la limite (1.23) existe}\}, \tag{1.24}$$

est appelé ***générateur infinitésimal*** *du semi-groupe* $\{S(t)\}$.

Proposition 1.3 *Soit* $S(t)$ *un semi-groupe continu sur* X *de générateur infinitésimal* A*, alors*
a) A *est un opérateur linéaire fermé, de domaine* $D(A)$ *dense dans* X *(*$D(A)$ *est muni de la norme du graphe).*
b) *pour* $u \in D(A)$, $S(t)u \in D(A)$ *et*

$$\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u = S(t)Au, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

c) *pour* $u \in X$, $\int_0^t S(s)uds \in D(A)$ *et* $A\left(\int_0^t S(s)uds\right) = S(t)u - u_0$.

Preuve. Voir A. Pasy [3, pg. 5]. ■

Remarque 1.5 [12] *Sur* $E = \mathbb{R}^N$*, l'opérateur* A *est une matrice de* $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. $S(t) = e^{At}$ *définit un semi-groupe. L'exponentielle d'une matrice est définie par une série entière donc on peut écrire* $S(t)$ *comme suit*

$$S(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Théorème 1.8 (**de Hille-Yosida II**)

Un opérateur linéaire non bornée $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un Semi-groupe de contraction sur X si et seulement si A est m-dissipatif et de domaine dense dans X.
Preuve. Voir J. P. RAYMOND $[17,$ pg. 21$]$. ■

Proposition 1.4 [20] *Le Laplacien dans* $\mathbb{R}^n$ *est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *(d'autre choix sont possible, par exemple* $X = H_0^1(\Omega)$*).*

1.6 Notion de l'existence locale et globale

1.6.1 Existence locale et unicité

L'étude d'existence locale et d'unicité des solutions du problème des équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaire abstraites (Voir A. Friedman [01], D. Henry [08] et A. Pazy [03]).
Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, $f : X \to X$. Étant donné, $u_0 \in X$.

Considérons le problème.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f, \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Définition 1.24 [4] *On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t \geq 0$ à valeurs dans X est une* ***solution locale*** *du problème (1.25), s'il existe u définie sur un* ***intervalle maximal*** $[0, T^*)$ *qui pour $t < T^*$ est l'unique solution de (1.25) dans $C^1([0, T^*), X)$.*
En particulier*, l'une des deux éventualités suivantes a lieu.*
i) $T^* = \infty$.
ii) $T^* < \infty$ *et* $\lim_{t \to T^*} \|u\| = \infty$.

Remarque 1.6 [4] *- Si la propriété* ***(i)*** *est satisfaite, on dit que la solution u est* ***globale.***
- Si ***(ii)*** *est satisfaite, on dit que u est* ***une solution explose en temps fini****.*

Exemple 1.2 [4] *Considérons le problème*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u), \ t > 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{1.26}$$

- Si $\mathbf{f}(u) = \mathbf{u}^2$*, la solution du problème (1.26) est donnée, pour* $0 \leq t < 1$*, par* $u(t) = \frac{1}{1-t}$.
La solution est donc ***explose*** *lorsque t s'approche de 1, donc il y a* ***une solution non globale****.*
- Si $\mathbf{f}(u) = \mathbf{u}$*, la solution du problème est donnée par* $u(t) = e^t$*, donc le problème de Cauchy admet* ***une solution unique globale****.*

1.6.2 Existence globale

Systèmes de réaction-diffusion

Définition 1.25 [4] *Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations paraboliques non linéaires qui peuvent s'écrire sous la forme*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \tag{1.27}$$

où l'inconnue $u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_m(x,t))^t$ *est un vecteur des variables dépendantes,*
$f(x,t,u) = (f_1(x,t,u), \cdots, f_m(x,t,u))^t$ *est la réaction (généralement non linéaire) et D est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion.*

Existence globale par l'effet régularisant

Théorème 1.9 *Soit le problème*

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u) & \text{sur } \Omega \times [o,T[\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [o,T[\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.28}$$

et $f(t,x,u) \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega))$ *pour un certain* $p > \frac{n}{2}$,*où* $n = \dim\Omega$ *(i.e.)*

$$f(t,x,u) \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) \Leftrightarrow \sup_{0<t<T} \|f(t,x,u)\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \exists c > 0, \int_\Omega |f(t,x,u)|^p\, dx \le c, \ \forall t \in [0,T]\,,$$

alors la solution de l'équation (1.28) et globale.

Preuve. Voir D. Henry [8] . ■

Exemple 1.3 [31] *Considérons le système*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -u^\alpha & \text{sur } [0,T[\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T[\,, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.29}$$

Nous allons étudies l'existence globale du problème (1.29).

On multiplie l'équation du problème (1.29) *par* u^α *et intègre sur* Ω, *on obtient*

$$\int_\Omega u^\alpha u_t dx - \int_\Omega u^\alpha \Delta u dx = -\int_\Omega u^{2\alpha} dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\alpha+1}dx + \alpha\int_\Omega u^{\alpha-1}|\nabla u|^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\alpha+1}dx \le 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u^{\alpha+1}(t,x)\,dx \le \int_\Omega u^{\alpha+1}(0,x)\,dx < \infty.$$

On a

$$\int_\Omega |f|^p\, dx = \int_\Omega u^{\alpha p} dx \quad p > \frac{n}{2},$$

posons

$$\int_{\Omega} u^{\alpha p} dx \leq \int_{\Omega} u^{\alpha+1} dx,$$

alors

$$\frac{n}{2} < p < \frac{\alpha+1}{\alpha} \Rightarrow n < 2 + \frac{2}{\alpha}.$$

alors d'après théorème de l'effet régularisant, la solution est globale en $n = 1 \vee n = 2$.

Fonctionnelle de Lyapunov

Définition 1.26 [18] *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de* m *équations, toute fonction*

$$L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

tel que

$$\frac{d}{dt}\left(L\left(u_1\left(t,.\right),...u_m\left(t,.\right)\right)\right) \leq 0, \tag{1.30}$$

pour tout $t > 0$ *et toute solution* $\left(u_1\left(t,.\right),...u_m\left(t,.\right)\right)$ *de système.*

Région invariante

Définition 1.27 [18] *Un sous-ensemble fermé* $\sum \subset \mathbb{R}^n$ *est appelé une région invariante pour le système défini par (1.27), si toute solution* $u(x,t)$ *ayant ses valeurs initiales et aux limites dans* $\sum$, *reste dans* $\sum$ *pour toute* $x \in \Omega$ *et pour toute* $t \in [0, t^*)$ *où* $t^* < T_{\max}$.

Théorème 1.10 [31] *Si dans* (1.27) *on a*

$$\begin{cases} f_1\left(0, u_2, \cdots, u_m\right) \geq 0, \\ f_2\left(u_1, 0, \cdots, u_m\right) \geq 0, \\ \vdots \\ f_m\left(u_1, u_2, \cdots, 0\right) \geq 0. \end{cases}$$

$\forall u_1, u_2, \cdots, u_m \geq 0$, *alors la région*

$$\sum = \left\{(u_1, u_2, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}^m, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \cdots, u_m \geq 0\right\},$$

est invariante.

Théorème 1.11 [31] *Si dans* (1.27) *on a*

$$\begin{cases} f_1\left(M_1, u_2, \cdots, u_m\right) \leq 0, \\ f_2\left(u_1, M_2, \cdots, u_m\right) \leq 0, \\ \vdots \\ f_m\left(u_1, u_2, \cdots, M_m\right) \leq 0. \end{cases}$$

$\forall u_1, u_2, \cdots, u_m \geq 0$*, alors la région*

$$\sum = \left\{(u_1, u_2, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}^m, u_1 \leq M_1, u_2 \leq M_2, \cdots, u_m \leq M_m\right\},$$

est invariante.

Chapitre 2

Applications de quelques équations d'évolution et quelques systèmes de réaction diffusion

La modélisation de phénomènes physiques, biologiques ou économiques a toujours été la principale motivation pour le développement des mathématiques, comme nous savons la modélisation est la démarche qui permet d'élaborer un modèle. Mais tout d'abord la question poser qu'est ce que modéliser ou bien qu'est ce que le modèle mathématique et pour la réponse à cette question il y a beaucoup de définitions mais la plus simple réponse est :
Le modèle mathématique est une traduction d'une observation ou bien convertir un problème concret issu du monde réel à un terme de nature mathématique c.à.d. utiliser les théorèmes, les techniques et des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle.

2.1 Topologie du modèle

2.1.1 Du modèle vers le réel

Ce sont les modèles **prédictifs** et sont utilisés pour anticiper des événements ou des situations comme prévoir la météo ou prévenir des épidémies. [15]

2.1.2 Du réel vers le modèle

Ce sont les modèles **descriptifs** et servant à représenter des données historiques, $i.e.$ rechercher le type du modèle à partir d'une masse d'informations dans le but de les interpréter. [15]

2.2 Comment créer un modèle mathématique

Pour créer un modèle mathématique simple, il faut respecter quelques règles suivantes
1· Choisir un modèle ou observer un certain phénomène.
2· Déterminer les lois qui sont liées au phénomène.
3· Ecrire les lois sous forme mathématique.
4· Choisir les inconnus et les variables du problème.
5· Mettre en équation le choix des inconnus et des variables du problème, cette étape est très importante et délicate.
6· Construire le modèle en utilisant l'outil mathématique et informatique.

Remarque 2.1 [15] *Dans le cas de **S.R.D**, un même modèle mathématique peut s'appliquer à plusieurs situations.*

2.3 Modélisation en quelques équations d'évolution

2.3.1 Exemple de modélisation du transfert de la chaleur dans une tige

Le transfert de chaleur, l'écoulement d'un fluide en milieu poreux ou encore la diffusion moléculaire dans un solide sont tous gouvernés par la même équation aux dérivées partielles. Examinons une portion cylindrique d'une tige isolée thermiquement. Nous allons voir comment la température du cylindre ci-dessous varie quand il reçoit (ou perd) de la chaleur provenant du reste de la tige.

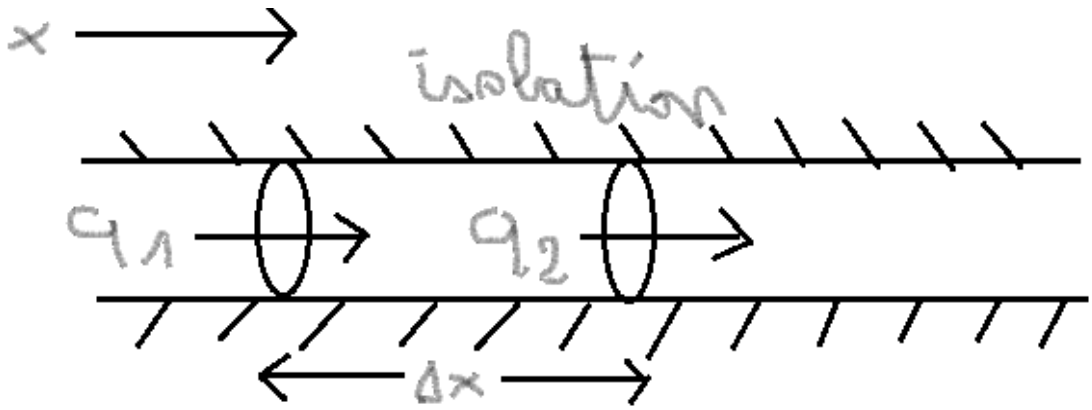


Fig. 1 : Schématisation du transfert de chaleur.

Le flux de chaleur satisfait la loi de Fourier

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2.1}$$

où k est la conductivité thermique et T la température.
Ça veut dire que le flux de chaleur est proportionnel à la dérivée de la température par rapport à sa position suivant l'axe x.
D'après la première loi de la thermodynamique, la quantité de chaleur ΔQ qui est emmagasinée dans un matériau de densité ρ, de longueur Δx, durant une augmentation de température ΔT est

$$\Delta Q = c_v \rho \Delta x \Delta T. \tag{2.2}$$

La quantité de chaleur qui entre dans le cylindre pendant un intervalle de temps Δt est donc

$$\begin{aligned} \Delta Q &= -(q_2 - q_1)\Delta t \ \text{(Dentition du flux)} \\ &\approx -(\Delta x \frac{\partial q}{\partial x})\Delta T \ \text{(Théorème de la moyenne)} \\ &= -\Delta x \frac{\partial}{\partial x}(-k\frac{\partial T}{\partial x})\Delta t \ \text{(Loi de Fourier)} \end{aligned}$$

$$\Delta Q = \Delta x \Delta t k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) implique

$$c_v \rho \Delta x \Delta T = \Delta x \Delta t k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Si on divise par $\Delta x \Delta t$ et que $\Delta t \to 0$, alors on obtient

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

L'équation de la chaleur normalisée est

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \tag{2.4}$$

où $D = \frac{k}{c_v \rho}$ est une constante qu'on appelle la diffusivité thermique. [15]

Conclusion

Nous avons vu que le phénomène de transfert de chaleur dans une tige satisfait l'équation de la chaleur. [15]

2.3.2 Exemple d'équation d'un produit dans un parallélépipède

Equation de diffusion en 1D

On considère un parallélépipède, de section S, constitué de matière homogène immobile (de l'eau par exemple (on pourra aussi considérer le cas de l'eau en mouvement), ayant une concentration C_1 d'un produit sur sa face gauche et C_2 sur sa face droite. On peut faire comme hypothèse que la quantité de produit Q qui franchit une section S du parallélépipède, c'est-à-dire qui circule par unité de longueur sur l'axe des x, de l'avant vers l'arrière pendant le temps Δt est (voir le schéma suivant)

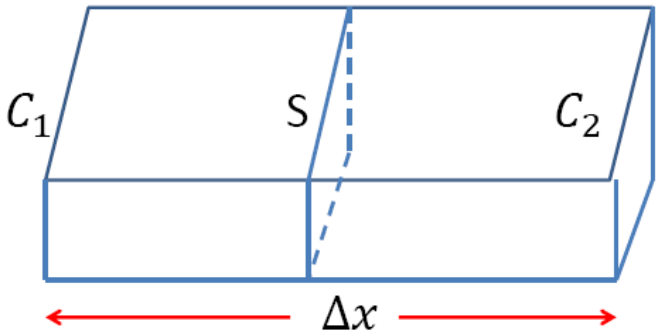


Fig. 2 : Schématisation d'un produit dans un parallépipède

Les hypothèses

La quantité de produit qui franchit est
1· Proportionnel à la section S.
2· Proportionnel à la différence $C_1 - C_2$.
3· Proportionnel à Δt.
4· Inversement Proportionnel à Δx (c'est-à-dire plus Δx est petit et plus la quantité de produit devant franchir la section S pendant l'intervalle de temps Δt sera importante pour passer de la concentration C_1 et C_2).
Soit

$$Q = K_x S \frac{C_1 - C_2}{\Delta x} \Delta t. \tag{2.5}$$

On admettra comme convention que Q est positif si $C_1 > C_2$ et que le coefficient K_x est constant le long de l'axe O_x (on pourra aussi considérer le cas de ce coefficient variable), cette équation très simple, admise comme hypothèse, est à la base de l'équation de la diffusion.

On considère maintenant un volume de matière homogène découpé en parallélépipède de longueur Δx. On considère des parallélépipèdes suffisamment petits pour que la concentration, au sein de chaque parallélépipède, y soit considérée comme constante. Faisant un bilan de produit au niveau de la tranche i selon l'axe des x, on regarde ce qui rentre et ce qui sort de cette tranche pendant l'intervalle de temps Δt. Afin de connaître la concentration dans cette tranche. On suppose donc qu'il n'y a pas d'échange de produits dans les directions O_y et O_z (voir le schémas suivant)

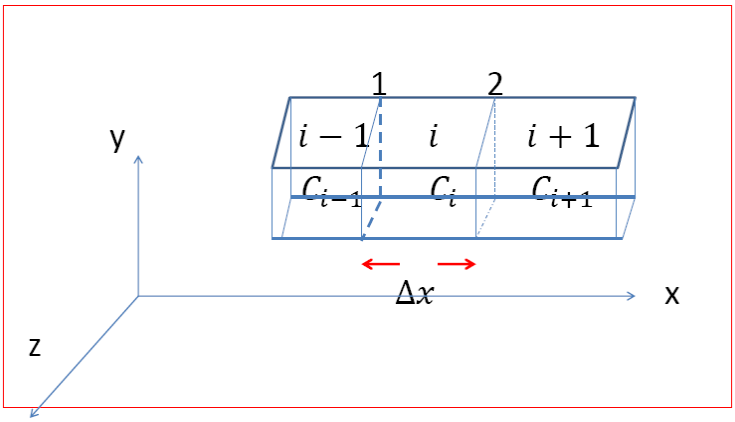


Fig. 3 : Schématisation d'un produit dans les directions O_y et O_z

La quantité de produit qui franchit la face 1, comptée positivement dans le sens de l'axe O_x s'écrit

$$Q_{i1} = K_x S \frac{C_{i-1} - C_i}{\Delta x} \Delta t. \tag{2.6}$$

La quantité de produit qui franchit la face 2, comptée positivement dans le sens de l'axe O_x, s'écrit

$$Q_{i2} = K_x S \frac{C_i - C_{i+1}}{\Delta x} \Delta t. \tag{2.7}$$

En considérant que le coefficient K_x est constant le long de l'axe O_x, le bilan dans la tranche i s'écrit

$$\text{accumulation } (Q_i) = \text{ce qui entre } (Q_{i1}) \text{ - ce qui sort } (Q_{i2})$$

$$Q_i = K_x S \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x} \Delta t.$$

Ecrivons la variation de concentration dans la tranche i

$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{Q_i}{S.\Delta x} \\ &= K_x S \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{S.\Delta x.\Delta x} \Delta t \end{aligned}$$

$$\Delta C = K_x \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2} \Delta t. \tag{2.8}$$

Soit

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = K_x \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2}. \tag{2.9}$$

Faisant tendre $\Delta t \to 0$, le premier membre de l'équation précédente va tendre vers $\frac{\partial C}{\partial t}$, a quoi va tendre alors le deuxième membre.

Considérons la courbe dessinée au tableau et sa dérivée $\frac{\partial C}{\partial x}$ au point d'abscisse x. Cette dérivée correspond à la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

On peut approximer cette tangente par la pente de la corde entre les points (x_i, C_i) et (x_{i+1}, C_{i+1}), cette pente est égale à $\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x}$, plus Δx est petit, et plus l'approximation est valide. Autrement dit, le terme $\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x}$ est une approximation de la dérivée première $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i$ à l'abscisse x_i quand $\Delta x \to 0$.

De la même façon, on peut approximer la dérivée première $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i$ à l'abscisse x_i par la pente de la corde entre les points (x_i, C_i) et (x_{i-1}, C_{i-1}), alors $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i \approx \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x}$ quand $\Delta x \to 0$.

On peut maintenant avoir une approximation de la dérivée seconde en x_i, en dérivant 2 fois $C(x)$ par rapport à x, et en appliquant les 2 façons vues au-dessus

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{\Delta x}\right)_{i+1} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{\Delta x}\right)_i \\
&= \left(\frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x^2}\right) - \left(\frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i = \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2}. \tag{2.10}$$

Autrement dit, le deuxième terme de l'équation A correspond à l'approximation de la dérivée seconde de la fonction C, quand $\Delta x \to 0$, nous avons

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_x \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_x \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_i. \tag{2.11}$$

L'équation précédente est dite de **la diffusion 1D (1D pour une dimension d'espace).** [15]

2.4 Modélisation en quelques systèmes de réaction diffusion

2.4.1 Environnement

Exemple de proie-prédateur

On prend comme exemple le phénomène naturel sous le nom (proie-prédateur), il se produit surtout dans les forêts, la mer et les grands fleuves.
Au début du vingtième siècle **(1929)**, Volterra a proposé un système d'équations de Réaction-Diffusion décrivant l'évolution de deux types de planctons (des êtres vivants en suspension dans la mer ou l'eau douce). En supposant que le taux de mortalité des proies et l'augmentation des prédateurs dus à la prédation sont proportionnels au produit des biomasses des proies P et celle des prédateurs H et en supposant que les taux des naissances et mortalités naturelles des deux types sont linéaires et proportionnels à leur biomasse, aussi en tenant compte de la diffusion constante de chaque espèce, on aboutit au système

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \varepsilon_P \Delta P + \alpha_n P - \alpha_m P - \gamma P.H, \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon_H \Delta H + \alpha'_n H - \alpha'_m H - \gamma' P.H, \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \times (0, +\infty)\,. \tag{2.12}$$

Avec conditions aux bords appropriées et conditions initiales positives, les coefficients α_n, α_m, γ, α'_n, α'_m, ε_P, ε_H sont supposés des constantes positives. [5]

2.4.2 En chimie

Considérons le schéma réactionnel

$$\sum_{i\in I} n_i R_i \underset{\iota}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \sum_{j\in J} n_i R_i, \quad \text{avec } I \cup J = \{1, \cdots, p\} \text{ et } I \cap J = \emptyset, \tag{2.13}$$

où $n_1, \cdots, n_p$ sont respectivement les nombres de molécules des réactions $R_1, \cdots R_p$ intervenant dans la réaction, les constantes h et ι dépendent de la température, de la position x et du temps t. L'application de la loi de conservation de masse et de la seconde loi de Fick (flux) donne

$$n_k \frac{\partial c_k}{\partial t} = \nabla.d_k \nabla c_k - h \prod_{i\in I} c_i^{n_i} + \iota \prod_{j\in J} c_j^{n_j}, \quad k \in I$$

$$= \nabla.d_k \nabla c_k + h \prod_{i\in I} c_i^{n_i} - \iota \prod_{j\in J} c_j^{n_j}, \quad k \in J, \tag{2.14}$$

où $c_1, \ldots, c_p$ représentent les concentrations des réactants $R_1, \ldots, R_p$ respectivement. Les constantes h et ℓ sont positives.

Remarque 2.2 [5] *La matrice diagonale D peut dépendre de t, x et u, comme elle ne peut pas être (c'est le cas où la diffusion d'une espèce affecte le taux de production des autres).*

Pour l'ébullition de l'eau, par exemple, on prend dans (2.14)
$p = 3$, $I = \{1, 2\}$, $J = \{3\}$, $n_1 = n_3 = 2$ et $n_2 = 1$, $R_1 = hydrogène$, $R_2 = oxygène$ et $R_3 = l'eau$, on obtient la réaction classique

$$2H_2 + O_2 \underset{\iota}{\overset{h}{\rightleftarrows}} 2H_2O. \tag{2.15}$$

Les équations décrivant cette réaction s'écrivent alors d'après (2.15)

$$\begin{cases} 2\frac{\partial[H_2]}{\partial t} = d_1\Delta[H_2] - h[H_2]^2[O_2] + \iota[H_2O]^2, \\ 2\frac{\partial[O_2]}{\partial t} = d_2\Delta[O_2] - h[H_2]^2[O_2] + \iota[H_2O]^2, \qquad x \in \Omega,\ t > 0. \\ 2\frac{\partial[H_2O]}{\partial t} = d_3\Delta[H_2O] + h[H_2]^2[O_2] + \iota[H_2O]^2, \end{cases} \tag{2.16}$$

Avec conditions aux bords appropriées par exemple

$$\frac{\partial[H_2]}{\partial\eta} = \frac{\partial[O_2]}{\partial\eta} = \frac{\partial[H_2O]}{\partial\eta} = 0,\ t > 0,\ x \in \partial\Omega,$$

et conditions initiales positives (i.e.)

$$[H_2]_{t=0} = [H_2]_0 > 0,\ \ [O_2]_{t=0} = [O_2]_0 > 0,\ \ [H_2O]_{t=0} = [H_2O]_0 > 0.$$

Les coefficients h et ι sont supposés des constantes positives, quoiqu'ils puissent dépendre de la température

$$h,\ \iota \simeq cT^{\beta}\exp\left(-\frac{E}{R}T\right),\ 1 \leq \beta \leq 2 \tag{2.17}$$

Voir S. L. Hollis et J. Morgan avec différentes conditions aux bords.

Chapitre 3

Existence de solutions de quelques équations d'évolution

Nous allons intéresser dans ce chapitre de donner quelques théories générales sur l'existence et l'unicité de solutions d'équations d'évolution du type parabolique de la forme

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f \quad \text{sur } [0,T[\,, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où A est un opérateur défini sur un espace E, u_0 la donnée initiale et f est une application dans E. Dans la première section nous allons donner quelques théorèmes d'existence dans le cas E est un espace de **Hilbert**, puis E est un espace de **Banach**. Dans la deuxième section nous choisissons cas particulier d'étudier l'existence de solution de l'équation de la chaleur semi-linéaire.

3.1 Cas d'un espace de Hilbert

3.1.1 Problème homogène

Théorème 3.1 ***(Théorème de Hille-Yosida)***
Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0,+\infty[\,,\ H) \cap C([0,+\infty[\,,\ D(A))\,,$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textit{sur } [0,+\infty[\,, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Preuve. Voir H. Brezis [14, pg. 105] . ■

Théorème 3.2 *Soit A un opérateur **maximale monotone**, autoadjoint, Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une fonction*

$$u \in C([0,+\infty[, H) \cap C^1([0,+\infty[, H) \cap C([0,+\infty[, D(A)),$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \ \ sur \ \ [0,+\infty[, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \ \ et \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \ \ \forall t \geq 0. \tag{3.5}$$

$$u \in C^k\left([0,+\infty[, D\left(A^l\right)\right), \ \ \forall k, \ l \text{ entier.}$$

Preuve. Voir H. Brezis [14, pg. 114] ■

3.2 Cas d'un espace de Banach

3.2.1 Problème linéaire

Équations homogènes

Théorème 3.3 (***Cauchy, Lipschitz, Picard***)
Soit E un espace de Banach et soit $A : E \longrightarrow E$ une application lipschitzienne. Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in C^1([0,+\infty[, E)$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \ \ sur \ \ [0,+\infty[, \\ u(o) = u_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Preuve. Voir H. Brezis [14, pg. 104] ■

Équations non homogènes

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et A un opérateur **m-dissipatif** et a domaine $D(A)$ dense dans E. Etant donnée u_0 est donnée initiale, et $f : [0,T] \longrightarrow E$. On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u' + Au = f(t), \ \ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Lemme 3.1 [4] *Soit $u_0 \in D(A)$ et $f \in C([0,T],\ E)$, on considère une solution $u \in C([0,T],\ D(A)) \cap C^1([0,T],\ E)$ du problème (3.7). Alors on a*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

Preuve. [4] Soit $t \in [0,T]$, on pose

$$\omega(s) = S(t-s)u(s).$$

Soit $s \in [0,T]$ et $h \in [0, t-s]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\omega(s+h)-\omega(s)}{h} &= S(t-s-h)\left[\frac{u(s+h)-S(h)u(s)}{h}\right] \\
&= S(t-s-h)\left[\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{S(h)u(s)-u(s)}{h}\right] \\
&= S(t-s-h)\left[\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{S(h)-I}{h}u(s)\right].
\end{aligned}$$

On fait $h \to 0$, on obtient

$$\omega'(s) = S(t-s)[u'(s) - Au(s)].$$

Alors

$$\omega'(s) = S(t-s)f(s). \tag{3.9}$$

En intégrant l'équation (3.9) entre 0 et t, on obtient

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t S(t-s)f(s),$$

on déduit que

$$\omega(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s).$$

■

Corollaire 3.1 [4] *Pour tout $u_0 \in D(A)$ et $f \in C([0,T],\ E)$, le problème (3.7) possède au plus une solution.*

Lemme 3.2 [4] *Pour tout $u_0 \in E$ et $f \in L^1([0,T],\ E)$, la formule (3.8) définit une fonction $u \in C([0,T],\ E)$. De plus, on a*

$$\|u\|_{C([0,T],\ E)} \leq \|u_0\| + \|f\|_{L^1([0,T],\ E)}.$$

Proposition 3.1 [4] *Soit* $u_0 \in D(A)$ *et* $f \in C([0,T], E)$, *on suppose que l'une ou moins deux conditions suivantes est satisfait*
(**i**) $f \in L^1((0,T), D(A))$,
(**ii**) $f \in W^{1,1}((0,T), E)$.
Alors u *donnée par* (3.8) *et la solution de* (3.7).

Preuve. [4] Elle décompose en quatre étape, on a $u_0 \in D(A)$.
Posons que

$$v = \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds, \text{ pour } t \in [0,T],$$

donc

$$u(t) = S(t) u_0 + v(t), \text{ avec } v(0) = 0.$$

Étape 01
On va montrer que

$$v \in C^1([0,T], E).$$

Car $f \in L^1((0,T), D(A))$, on écrit

$$\forall t \in [0,t[\text{ et } h \in [0, t-s],$$

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} S(t+h-s) f(s)\, ds - \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds\right] \\ &= \int_0^t S(t-s)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) f(s)\, ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t-s) S(h) f(s)\, ds, \end{aligned}$$

et on fait $h \to 0$, on remarque que

$$\frac{S(h)-I}{h} f \to Af \text{ dans } L^1((0,T), E),$$

lorsque $h \to 0$, on obtient

$$\frac{d^+ v(t)}{dt} = \int_0^t S(t-s) Af(s)\, ds + f(t), \text{ pour tout } t \in [0,T[,$$

car $f \in W^{1,1}([0,T], E)$, on écrit pour $t \in [0,T[$ et $h \in [0, T-t]$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t S(s) \frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} ds + S(h) \frac{1}{h}\int_0^h S(t-s) f(s)\, ds,$$

et on fait $h \to 0$, on remarque que

$$\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} \to f'(t-s) \text{ dans } L^1((0,t),E),$$

on résulte que

$$\frac{d^+v(t)}{dt} = \int_0^t S(s) f'(t-s)\,ds + S(t) f(0), \text{ pour tout } t \in [0,T[.$$

Dans le deux cas on a

$$\frac{d^+v(t)}{dt} \in C([0,T[,E),$$

et donc

$$v \in C^1([0,T[,E).$$

Étape 02

De la même façon, on montre que $\frac{d^-v(t)}{dt}$ existe et égale à $\lim_{t\to T} v'(t)$, d'où le résultat $[v \in C^1([0,T[,E)]$.

Étape 03

Soit $t \in [0,T[$ et $h \in [0,T-s]$. On a

$$\begin{aligned}\frac{S(h)-I}{h}v(t) &= \frac{1}{h}\int_0^t S(t+h-s) f(s)\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t S(t-s) f(s)\,ds. \\ &= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s) f(s)\,ds.\end{aligned}$$

En faisant $h \to 0$, on obtient

$$v(t) \in D(A) \text{ et } Av(t) = v'(t) - f(t),$$

par la fermeture du **Graphe,** il reste vrai pour $t = T$. Il résulte que $v \in C([0,T],D(A))$ et que v vérifie l'équation du problème (3.7).

Étape 04

On a

$$u(t) = S(t)u_0 + v(t) \in C([0,T],D(A)) \cap C^1([0,T],E).$$

De plus

$$\begin{aligned}u'(t) &= AS(t)u_0 + Av(t) + f(t) \\ &= Au(t) + f(t), \text{ pour tout } t \in [0,T].\end{aligned}$$

On a donc, (3.7) est immédiat. [4] ■

Corollaire 3.2 [4] *Soit* $u_0 \in E$, $f \in C([0,T],\ E)$ *et* u *donnée par* (3.8) *supposons que l'une des deux conditions suivantes a lieu*
(**i**) $u \in C([0,T],\ D(A))$,
(**ii**) $u \in C^1([0,T],\ E)$.
Alors u *est la solution de* (3.7).

3.2.2 Problème semi-linéaire

On considère ici le cas particulier de l'équation semi-linéaire avec condition défini comme suit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u), \text{ sur } [0,T[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Solutions locales

Définition 3.1 [12] *On dit que le problème* (3.10) *admet* ***une solution classique locale*** *si* $\forall u_0 \in D(A)$, $\exists T > 0$, $\exists u \in C([0,T[, D(A)) \cap C^1([0,T[, E)$.

Proposition 3.2 [9] *Si* $f \in L^1(]0,T[, E)$, *alors*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(u(s))\, ds, \tag{3.11}$$

est l'unique solution intégrale de (3.10). *Elle dépend de façon continue de* u_0 *et* f.

Corollaire 3.3 [9] *Si* E *est un espace réflexif et que* f *est une fonction lipschitzienne de* $[0,T]$ *dans* E, *alors pour tout* $u_0 \in D(A)$ *la solution intégrale* (3.11) *de* (3.10) *est l'unique solution classique.*

Théorème 3.4 *Soit* $f \in C(\mathbb{R}_+ \times E,\ E)$ *et lipschitzienne sur les bornés de* E *uniformément sur les compactes en temps.*
(**i**) *Pour tout* $u_0 \in E$, *il existe* $T(u_0) > 0$ *tel que, l'équation d'évolution semi-linéaire* (3.10) *possède une solution intégrale* u (3.11) *sur l'intervalle* $[0, T(u_0)]$.
(**ii**) *La solution dépend continument de la donnée initiale dans le sens où, pour tout* $u_0 \in E$ *et pour tout* $T \in]0, T(u_0)[$, *il existe* $\delta > 0$ *et* $k > 0$ *tel que, pour tout solution intégrale* $v(t)$ *de donnée initiale* v_0 *tel que,*
$\|u_0 - v_0\| < \delta$, *on a* $T(u_0) > T$ *et* $\forall t \in [0,T]$.

$$\|v(t) - u(t)\| \leq k \|v_0 - u_0\|.$$

Preuve. Voir E. Dumos et R. Joly [9, pg. 34]. ■

Théorème 3.5 [9] *Soit $f \in C(\mathbb{R}_+ \times E, E)$ et lipschitzienne sur les bornés de E uniformément sur les compactes en temps.*
Soit $T > 0$, soit $u_0 \in D(A)$ et $u \in C([0,T], E)$ l'unique solution intégrale de problème (3.10). On suppose soit que f est lipschitzienne en temps et que E est réflexif, soit que $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times E, E)$. Alors $u \in C^1([0,T], E) \cap C([0,T], D(A))$ est solution classique de problème (3.10).

Preuve. [12] On note d'abord que u est dans une boule $B(0,R)$ de E. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que f est globalement lipschitzienne de constante K aussi bien en temps qu'en espace. On notera aussi

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \left\|e^{At}\right\| \text{ et } M' = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t,0)\|.$$

On a

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= \left(e^{A(t+h)} - e^{At}\right) u_0 + \int_0^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s, u(s))\, ds - \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, u(s))\, ds \\ &= e^{At}\left(e^{Ah} - Id\right) u_0 + \int_0^h e^{A(t+h-s)} f(s, u(s))\, ds \\ &\quad + \int_0^t e^{A(t-s)} \left(f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))\right) ds. \end{aligned}$$

Or $\left(e^{Ah} - Id\right) u_0 = \int_0^h e^{As} A u_0 ds$, donc

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq hM \|Au_0\| + M(KR + M')h + \int_0^t MK(|h| + \|u(s+h) - u(s)\|)\, ds.$$

Il suffit d'appliquer le lemme de Gronwall pour avoir que u est lipchitzienne en temps. Si E est réflexif, on peut directement appliquer le Corollaire (3.3).
On suppose désormais que $f \in C^1(E)$. Pour appliquer la proposition (3.1), il suffit de montrer que u est de classe C^1. Pour cela, on constate que l'équation

$$\frac{dv}{dt} = Av + f'_t(t,u) + f'_u(t,u)\, v, \quad v(0) = v_0 = Au_0 + f(0, u_0),$$

est bien posée sur E et définit une unique solution intégrale $v(t)$ Il reste a montrer que $v = u'$, on pose donc

$$\omega_h = \frac{(u(h+.) - u)}{h} - v.$$

On a

$$\begin{aligned}\omega_h(t) &= e^{At}\left(\frac{e^{Ah}u_0-u_0}{h}-Au_0\right)+\left(\frac{1}{h}\int_0^h e^{A(t+h-s)}f(s,u(s))\,ds-e^{At}f(0,u_0)\right)\\ &\quad+\int_0^t e^{A(t-s)}\left(\frac{f(s+h,u(s+h))-f(s,u(s))}{h}-f'_t(s,u(s))-f'_u(s,u(s))\,v(s)\right)ds.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, on obtient

$$\omega_h(t)=o(h)+\int_0^t e^{A(t-s)}f'(s,u(s))\,\omega_h(s)\,ds.$$

et il suffit d'appliquer le lemme de Gronwall pour avoir que ω_h tend vers 0. Comme $u(t)$ est donc dérivable a droite et par ailleurs continue, u est dérivable sur $[0,T]$. ■

Solutions globales classiques

Définition 3.2 [12] *Soit $u_0 \in D(A)$. On appelle **solution classique globale** toute fonction $u \in C([0,+\infty[,D(A))\cap C^1(]0,+\infty[,E)$, tel que*

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}+Au=F(u), \text{ sur } [0,+\infty[\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{3.12}$$

Théorème 3.6 *Si F est lipschitzienne dans C^1 (c'est-à-dire, l'application*

$$u\in E\to F'(u)\in\mathcal{L}(E),$$

est continue et $|F'(u)|\le M$), alors pour tout $u_0\in D(A)$, il existe u solution globale classique de (3.12).

Preuve. voir F. Dardalhon et F. Verga [12, pg. 48]. ■

3.3 Cas particulier : équation de la chaleur semi-linéaire

On prend maintenant un problème semi-linéaire concret pour illustrer la théorie sur les EDP semi-linéaires. On s'intéresse donc à l'équation de la chaleur avec une donnée $F : E \to E$ localement lipchitzienne. On note $E = C_0(\Omega)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω. Le problème s'énonce ainsi, on cherche

$$u\in C([0,T],E)\cap C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(\Omega)\right),\ \Delta u\in C\left([0,T],L^2(\Omega)\right),$$

tel que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u), \\ u(0) = u_0 \in E. \end{cases} \tag{3.13}$$

On a alors

Proposition 3.3 [12] *Soit $u_0 \in E$, $T > 0$ et $u \in C([0,T], E)$. Alors u est solution du problème (3.13) si et seulement si u vérifie*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))\,ds. \tag{3.14}$$

3.3.1 Existence locale

On énonce premièrement un résultat d'existence locale

Théorème 3.7 [12] *Pour tout $u_0 \in E$, il existe un unique u défini sur $[0,T]$ solution de (3.13), pour tout $t \in [0,T]$.*

Preuve. [12] Soit $u_0 \in E$. La proposition implique que trouver une solution (3.13) équivaut à trouver u vérifiant (3.14). On applique le théorème d'existence locale déjà vu précédemment. On pose

$$g : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

tel que $F(u)(x) = g(u(x))$. On vérifie que g est lipschitzienne sur les bornés. Montrons donc que

$$\forall r, \forall h, v \in B(0,r), \exists M_r, \ \|g(t,h) - g(t,v)\| \leq M_r \|h - v\|.$$

Soit $r > 0$, pour tout x, $\|F(h)(x) - F(v)(x)\| = \|g(h(x)) - g(v(x))\|$, or F est localement lipschitzienne donc pour tout $h \in B(0,r)$, il existe V_h et K_h, tels que pour tous $v, w \in V_h$, on a

$$\begin{aligned} \|F(h)(x) - F(v)(x)\| &\leq K_h \|v(x) - w(x)\| \\ &\leq \max_r \left(\sup_{h \in B(0,r)} K_h \right) \|v(x) - w(x)\|. \end{aligned}$$

Donc on peut appliquer le théorème d'existence locale car la constante de Lipschitz est indépendante de h. ■

3.3.2 Existence globale

Il y a deux types de résultats pour l'existence globale. Le premier donne que si F satisfait certaines conditions pour $|u|$ grand, alors toutes les solutions de (3.13) sont globales et le deuxième donne que si F satisfait à certaines conditions pour $|u|$ petit, les solutions seront globales à condition d'avoir de petites données initiales. On considère dans un premier temps $|u|$ grand. On a le théorème suivant

Théorème 3.8 [12] *On suppose qu'il existe des constantes K et C telles que*

$$u\,F(u) \leq C\,|u|^2, \text{ pour } |u| > K.$$

Alors pour tout $u_0 \in E$, la solution de (3.13) donnée par (3.14) est globale.

Preuve. [12] Montrons que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\| < +\infty.$$

Ceci donnera que $T = +\infty$ et que la solution est globale. Faisons une estimation d'énergie c'est-à-dire multiplions l'équation par u et intégrons sur Ω, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |F(u)\,u|\,.$$

Les intégrales ci-dessus sont bien définies compte tenu de l'espace dans lequel on a choisi u. On scinde la dernière intégrale

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\Omega\cap\{|u|\leq K\}} |F(u)\,u| + \int_{\Omega\cap\{|u|\geq K\}} C\,|u|^2\,.$$

Le terme $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2$ est positif donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \leq C' + C\int_{\Omega\cap\{|u|\geq K\}} |u|^2\,.$$

On peut majorer la première intégrale par C' puisque u et $F(u)$ sont continus sur un compact. On pose

$$f(t) = \int_\Omega |u(t)|^2\,dt.$$

On intègre l'inégalité précédente entre 0 et t on obtient que

$$f(t) - f(0) \leq C't + C\int_0^t f(s)\,ds.$$

On utilise maintenant le lemme de **Gronwall** qui donne

$$f(t) \leq (f(0) + C't)\exp\left(C\int_0^t f(s)\,ds\right).$$

De plus $t \in [0,T]$, on obtient finalement la majoration suivante

$$f(t) \leq (f(0) + C'T)\exp\left(C\int_0^T f(s)\,ds\right) < +\infty.$$

On obtient ainsi le résultat souhaité. ■

Voici maintenant le théorème d'existence globale pour $|u|$ petit.

On notera $\lambda = \inf\left\{\|\nabla u\|_{L^2},\ u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2} = 1\right\}$.

Théorème 3.9 *On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\mu < \lambda$ tels que*

$$u\,F(u) \leq \mu\,|u|^2,\ \forall\,|u| \leq \alpha.$$

Alors il existe une constante A telle que si $\|u_0\| \leq \alpha A$, la solution u correspondante de (3.13) est globale et

$$\|u(t)\| \leq A\,\|u_0\|\,e^{-(\lambda-\mu)t},\ \forall t \geq 0. \tag{3.15}$$

Preuve. Voir **F. Dardalhon et F. Verga** [12, pg. 53] ■

Chapitre 4

Existence globales de solutions pour quelques systèmes de réaction-diffusion

Dans ce chapitre nous intéressons d'étudier l'existence globale de solution de quelques systèmes de réaction-diffusion (2×2). Pour démontrer l'existence des solutions des **S.R.D**, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles sont basées sur des estimations à priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov. Ici, nous n'exposons pas la première méthode puisqu'elle ne donne pas toujours l'existence globale vu la difficulté et la complexité des termes de Réaction de certaines **S.R.D**, mais nous nous consacrons à la méthode de l'effet régularisant qui est basé sur des méthodes fonctionnelles de Lyapunov qui nous donne des résultats satisfaisants, donc pour démontrer l'existence globale il suffit de démontrer que les termes de réaction sont dans $L^{\infty}\left([0,T[\,,L^{p}\left(\Omega\right)\right)$ pour un certain $p>\frac{n}{2}$ où $n=\dim\Omega$.

4.1 Existence globale de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion à matrice diagonale

Considérons le système parabolique semi-linéaire_suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-d_1\Delta u=-f(u;v) & \text{dans } \mathbb{R}^{+}\times\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t}-d_2\Delta v=f(u,v) & \text{dans } \mathbb{R}^{+}\times\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \eta}=0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{+}\times\partial\Omega, \tag{4.2}$$

et les données initiales

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad v(0,x)=v_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.3}$$

Où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$. d_1, d_2 sont des constantes positives non nul et $d_1 \neq d_2$. Les données initiales sont supposées non négatives. La fonction $f(u,v)$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et non négative qui vérifie $f(0,s)=0$, pour tout $s \geq 0$ et

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{\ln(1+f(r,s))}{s}\right] < \alpha < \alpha^*, \text{ pour tout } \quad r \geq 0. \tag{4.4}$$

Où

$$\alpha = \frac{8d_1d_2}{n\|u_0\|_\infty (d_1-d_2)^2}. \text{ [21]} \tag{4.5}$$

4.1.1 Existence locale et positivité de solutions

Existence locale

dans l'espace de Banach $C(\overline{\Omega})$ nous définissons la norme $\|u\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. L'espace produit $X = C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|(u,v)\|_X = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ devient un espace de Banach. Si $w(t) = (u(t), v(t))$, alors nous pouvons convertir le système (4.1) à un système de premier ordre abstrait dans l'espace de Banach X de la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[w(t)] = \prod w(t) + F[w(t)], \ t>0 \\ w(0) = w_0 = (u_0, v_0) \in X, \end{cases} \tag{4.6}$$

avec

$$F[w(t)] = (-f(u,v), f(u,v)),$$

i.e. F est une fonction localement lipschitzienne sur l'espace X. L'opérateur

$$\prod : D(\Delta) \times D(\Delta) \to X,$$

est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} d_1\Delta & 0 \\ 0 & d_1\Delta \end{pmatrix},$$

où

$$D(\Delta) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \Delta u \in C(\overline{\Omega}), \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}.$$

Si $d > 0$, alors l'opérateur $d\Delta$ génère un semi-groupe analytique des opérateurs compacts sur l'espace $C(\overline{\Omega})$. Si $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont les semi-groupes analytiques générées respectivement par

$d_1\Delta$ et $d_2\Delta$, dans l'espace $C\left(\overline{\Omega}\right)$, alors l'opérateur $\prod$ génère un semi-groupe analytique des opérateurs compacts dans l'espace X qui est donnée par

$$\begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_2(t) \end{pmatrix}.$$

L'existence d'une solution locale classique de (4.6) dans un intervalle maximal $[0, T^*[$ (**voir** D. Henry [7] et A. Pazy [3]). [21]

La positivité de solutions

Toutes les méthodes (principe du maximum, région invariant...) garanties la positivité de solution. Maintenant nous rappelons que la bornitude de la première composante u de la solution est garantie par le principe du maximum.
En effet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u \leq 0 & \text{dans }]0, T^*[\times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0 & \text{dans }]0, T^*[\times \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors d'après le théorème du principe du maximum [théorème (1.4)], on a

$$u \leq \|u_0\|_\infty .$$

4.1.2 Existence globale de solutions

Utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov à croissance exponentielle

Théorème 4.1 (***Voir M. Yahi & K. Saoudi*** [21])
Soit $(u(t,.), v(t,.))$ *une solution du système*(4.1)*, alors la fonctionnelle*

$$t \longrightarrow L(t) = \int_\Omega \left[(M - u(t,x))^{-\gamma} \exp \beta v(t,x)\right] dx, \tag{4.7}$$

est une fonction décroissante dans l'intervalle $[0, T^*)$ pour toutes constantes positives β et γ telle que

$$\beta M < \gamma < \frac{4d_1d_2}{(d_1 - d_2)^2}, \tag{4.8}$$

et tout M satisfaisant

$$\|u_0\|_{L^\infty} < M. \tag{4.9}$$

Preuve. Dérivons L par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_\Omega \left[\left(\gamma (M-u)^{-\gamma-1} \exp \beta v\right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\beta (M-u)^{-\gamma} \exp \beta v\right) \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx \\ &= \int_\Omega \left[d_1 \gamma (M-u)^{-\gamma-1} \Delta u + d_2 \beta (M-u)^{-\gamma} \Delta v \right] \exp(\beta v)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega \left[\beta (M-u)^{-\gamma} - \gamma (M-u)^{-\gamma-1} \right] f(u,v) \exp(\beta v)\, dx, \end{aligned}$$

alors

$$L'(t) = I + J.$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$I = -\int_\Omega T(\nabla u, \nabla v) (M-u)^{-\gamma-2} \exp(\beta v)\, dx.$$

Où

$$T(\nabla u, \nabla v) = \gamma \left[d_1 (\gamma+1) |\nabla u|^2 + \beta (M-u)(d_1+d_2) \nabla u \nabla v \right] + d_2 \beta^2 (M-u)^2 |\nabla v|^2 .$$

Le discriminant de T est donné par

$$D = (M-u)^2 \beta^2 \left[(d_1+d_2)^2 \gamma - 4 d_1 d_2 (\gamma+1) \right].$$

Notons que $D < 0$ si

$$\frac{\gamma}{\gamma+1} < \frac{4 d_1 d_2}{(d_1+d_2)^2} \Rightarrow \gamma < \frac{4 d_1 d_2}{(d_1-d_2)^2}.$$

D'autre part on a

$$J = \int_\Omega \left[\beta (M-u)^{-\gamma} - \gamma (M-u)^{-\gamma-1} \right] f(u,v) \exp(\beta v)\, dx$$

Notons $J \leq 0$ si

$$\beta (M-u) - \gamma \leq 0,$$

puisque nous avons $0 < u < M$, pour tout u (Principe du maximum) , puis il suffit de choisir γ tel que

$$\gamma > \beta M.$$

On résulte que

$$\beta M < \gamma < \frac{4 d_1 d_2}{(d_1-d_2)^2}.$$

On établit que si $I \leq 0$ et $J \leq 0$ alors (4.8) est satisfaite.
Finalement, nous avons montré

$$L'(t) \leq 0.$$

Nous avons établi que $L \leq k$ pour une constante k et par conséquent

$$(M-u)^{-\gamma} \exp(\beta v) \in L^{\infty}\left([0.T^{*}[, L^{1}(\Omega)\right). \tag{4.10}$$

Ce implique que

$$\int_{\Omega} \exp \beta v(t,x)\, dx \leq k.$$

Comme la fonction f est continue dans $\mathbb{R}_{+}^{2}$ et par le principe de maximum, $0 < u < M$, alors la limite (4.4) est uniforme sur $[0,\ M]$ alors, Il existe deux constantes h et α appartient à $\mathbb{R}_{+}^{*}$ telle que

$$1 + f(u,v) \leq h \exp \alpha v, \text{ pour tous } v \geq 0 \text{ et } u \in [0,M],$$

par conséquent

$$\int_{\Omega} |f|^{p}\, dx \leq h \int_{\Omega} \exp(\alpha p v)\, dx,$$

posons $\beta = p\alpha$, alors on peut choisir γ et M tels que (4.8) et (4.9) soient satisfaisante. Donc

$$\exists p > \frac{n}{2},\ \exists \alpha > 0 : p\alpha = \beta < \frac{4d_1 d_2}{(d_1 - d_2)^2 M},$$

nous déduisons que

$$f(u(t,.), v(t,.)) \in L^{\infty}([0,T^{*}[, L^{p}(\Omega)) \qquad \text{pour un certain } p > \frac{n}{2}.$$

Alors, d'après le théorème (1.9), la solution (u,v) est globale sur $[0,T^{*}[$. ■

Théorème 4.2 [21] *Si $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}_{+}^{2}\right)$ est une fonction dérivable continue non négative telle que $f(0,s) = 0$ pour tout $s \geq 0$ et satisfaisant à la condition (4.4), alors toutes les solutions de (4.1)-(4.3) avec des données initiales positives, sont globales dans le temps et uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T^{*}[$.*

4.2 Existence globale de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion à matrice triangulaire

Considérons le système parabolique non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \lambda - f(u,v) - \mu u & \text{dans } \mathbb{R}^{+} \times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v = f(u,v) - \mu v & \text{dans } \mathbb{R}^{+} \times \Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

Avec les conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{4.12}$$

et les conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.13}$$

où Ω est un domaine borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$, a, c, d, λ, μ des constantes positives.
Nous supposons les hypothèses suivantes
$(\mathbf{A1})$: $a > 0$, $c > 0$, $d > a$, $2\sqrt{ad} > c$, $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$, et la fonction $f(u,v)$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^+$ et non négative tel que,
$(\mathbf{A2})$: $f(0,\eta) = 0$ et $f(\xi,\eta) \geq 0$ avec $f\left(\xi, \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{\mu} - \xi\right)\right) = 0$ où $a + c \geq d$,
$(\mathbf{A3})$: $f(\xi,\eta) \leq C\varphi(\xi)\eta^r e^{\alpha\eta}$ pour quelque constante $C > 0$ et $\alpha > 0$ où $a + c < d$.
Où r est une constante positive tel que $(r \geq 1)$ et φ et une fonction continûment différentiable non négative sur $[0, +\infty)$ tel que $\varphi(0) = 0$.
$v_0(.)$, $u_0(.)$ sont non négatives et les fonctions borné satisfaits les restrictions suivants

$$\begin{aligned} \|u_0\|_\infty &\leq \frac{\lambda}{\mu} < \frac{8ad}{\alpha n(a-d)^2}, \text{quand } a + c < d, \\ \|u_0\|_\infty &\leq \frac{\lambda}{\mu}, \text{ quand } a + c \geq d, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$v_0 \geq \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{\mu} - u_0\right). \ [6] \tag{4.15}$$

4.2.1 Existence locale et positivité de solutions

Existence locale

L'étude de l'existence et l'unicité de solution locale (u,v) de (4.11)-(4.13) découle du théorème d'existence de base pour les équations parabolique semi linéaire (**Voir** D. Henry [8] ,A. Paz [3] , A. Friedman [1]). En conséquence, pour toute données initiales dans $C(\overline{\Omega})$ ou $L^\infty(\Omega)$ il existe $T^* \in (0, +\infty)$ tel que (4.11)-(4.13) admet une solution unique classique sur $[0, T^*) \times \Omega$. [6]

La positivité de solutions

Comme les conditions initiales (4.14) et (4.15) sont satisfaites sous l'hypothèse $(\mathbf{A1})$ et $(\mathbf{A2})$, le lemme suivant dit que la solution classique de (4.11)-(4.13) est non négative sur $[0, T^*) \times \Omega$.

Lemme 4.1 [6] *Supposons que* $(\mathbf{A1})$, $(\mathbf{A2})$ *sont satisfaits, alors pour toutes conditions initiale* u_0 *et* v_0 *sont satisfaisant (4.14) et (4.15). La solution classique* (u, v) *de problème (4.11)-(4.13) sur* $[0, T^*) \times \Omega$ *est satisfait*

$$0 \leq u \leq \frac{\lambda}{\mu},\ v \geq \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{\mu} - u\right).$$

Preuve. Dans le système (4.11) , la matrice de diffusion est

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A^t sont $\begin{cases} \lambda_1 = a, \\ \lambda_2 = d. \end{cases}$

Les vecteurs propres de A^t sont

le vecteur propre associée à λ_1 est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

le vecteur propre associée à λ_2 est $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{c}{d-a} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Multiplions la première équation de système (4.11) par 1 et la deuxième équation par 0 puis en additionnant le résultat des deux équations membre à membre, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \lambda - f(u, v) - \mu v,$$

De la même façons, multiplions la première équation de système (4.11) par $\frac{c}{d-a}$ et la deuxième équation par 1 puis en additionnant le résultat des deux équations membre à membre, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{d-a}u + v\right) - d\Delta\left(\frac{c}{d-a}u + v\right) = \frac{d-a-c}{d-a}f(u, v) - \mu\left[v - \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{\mu} - u\right)\right],$$

posons le changement de variable.

$$\omega = v - \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{\mu} - u\right),$$

$$F(u, \omega) = f\left(u, \omega + \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{\mu} - u\right)\right).$$

Alors

$$\frac{d\omega}{dt} - d\Delta\omega = \frac{d-a-c}{d-a}F(u, \omega) - \mu\omega.$$

On déduit le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} - a\Delta u = \lambda - F(u, \omega) - \mu u & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial \omega}{dt} - d\Delta\omega = \dfrac{d-a-c}{d-a}F(u, \omega) - \mu\omega & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Avec les conditions sur la frontière

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0, \tag{4.17}$$

et les conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \omega(0,x) = \omega_0(x). \tag{4.18}$$

Si nous supposons $(\mathbf{A1})$ et $(\mathbf{A2})$, alors avec une simple application du théorème de comparaison **(voir théorème 1.5)** et théorème de région invariant **(voir théorème 1.10)** le système (4.16) implique que pour toutes les conditions initiales u_0 et v_0 satisfait (4.14) et (4.15), on obtient

$$0 \leq u(t,x) \leq \frac{\lambda}{\mu},\ v(t,x) \geq \frac{c}{d-a}\left(\frac{\lambda}{u} - u(t,x)\right),\ \forall (t,x) \in [0,T^*) \times \Omega.$$

■

4.2.2 Existence globale de solutions

Il est clair que pour prouver l'existence globales de solutions de problème (4.11)-(4.13), nous avons besoin prouver pour le problème (4.16)-(4.18). Dans un premier temps, lorsque $(a+c) \geq d$, les solutions locales classiques de (4.11)-(4.13) peut être élargie comme une solutions classiques et uniformément borné sur $[0,+\infty) \times \Omega$ pour toute donnée initiale u_0 non négative et v_0 satisfait (4.14) et (4.15) sans aucune restriction sur la croissance de la fonction f sous les hypothèses $(\mathbf{A1})$ et $(\mathbf{A2})$. En effet, depuis u, w et f sont positifs ou nuls, puis à partir de $(\mathbf{A1})$ et $(\mathbf{A2})$, nous avons par le théorème de comparaison que

$$0 \leq u(t,x) \leq \frac{\lambda}{\mu},\ 0 \leq \omega(t,x) \leq \|\omega_0\|_\infty,\ \forall (t,x) \in [0,T^*) \times \Omega.$$

Maintenant, le principale résultat pour le cas $(a+c) < d$ est indiqué dans le théorème suivant. [6]

Théorème 4.3 (***Voir BELGACEM REBIAI*** [6])

Sous les hypothèses $(\mathbf{A1})$-$(\mathbf{A3})$ et les restrictions (4.14) et (4.15), les solutions de problème (4.11)-(4.13) sont globales et uniformément bornées sur $[0,T^*) \times \Omega$. Depuis $0 \leq u \leq \frac{\lambda}{\mu}$, alors le problème de l'existence globale réduit pour établir le caractère borné uniforme de ω sur $[0,T^*)$. Par la théorie de L^P-régularisant pour l'opérateur parabolique, il en résulte qu'il suffit pour déterminer une estimation uniforme de $\|\rho F(u,\omega) - \mu\omega\|_p$ sur $[0,T^*)$ pour certains $p > \frac{n}{2}$ où $\rho = \frac{d-a-c}{d-a}$ la preuve du théorème (4.3) est basée sur la proposition clé suivante.

Utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov à croissance exponentielle et polynômiale

Proposition 4.1 [6] *Supposons que* (**A1**)-(**A3**)*, (4.14) et (4.15), pour chaque solution classique* (u,ω) *de (4.16)-(4.18) sur* $[0.T^*)\times\Omega$*, on considère la fonction*

$$L(t)=\int_\Omega\left[\delta u+(M-u)^{-\gamma}(\omega+1)^{\beta p}e^{\alpha p\omega}\right](t,x)\,dx,$$

où α, β, γ, δ, p *et* M *sont des constantes positives telles que*

$$\frac{\lambda}{\mu}<M<\frac{2\gamma}{\alpha\eta},\ \gamma<\overline{\gamma}=\frac{4ad}{(a-d)^2},\ \beta=\max\left\{\gamma,\frac{\overline{\gamma}(1+\gamma)}{(\overline{\gamma}-\gamma)}\right\}. \tag{4.19}$$

Alors, il existe $\delta>0$, $\sigma>0$ *et* $p>\frac{n}{2}$ *telle que*

$$\frac{d}{dt}L(t)\le-\mu L(t)+\sigma,\ \forall t\in[0,T^*[\,. \tag{4.20}$$

Avant de démontrer cette proposition nous avons besoin le lemme suivant.

Lemme 4.2 [6] *Soit* (u,ω) *une solution de (4.16)-(4.18) sur* $[0,T[\times\Omega$ *puis sous l'hypothèse* (**A3**)*, nous avons*

$$\int_\Omega F\left(u(t,x),\omega(t,x)\right)dx\le\lambda\left|\Omega\right|-\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx. \tag{4.21}$$

Preuve. [6] *Étant donné que* u *est une fonction non négative, il suffit d'intégrer les deux côtés de la première équation du système (4.16) sur* Ω*, pour obtenir (4.21) qui participe la preuve.* ■

Preuve. De proposition (4.1). [6]
Dérivons L par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &= \delta\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx+\int_\Omega\left[\gamma(M-u)^{-\gamma-1}(w+1)^{\beta p}u_t+\beta p(M-u)^{-\gamma}(\omega+1)^{\beta p-1}\omega_t\right]e^{\alpha p\omega}dx\\ &\quad+\int_\Omega\alpha p(M-u)^{-\gamma}(\omega+1)^{\beta p}\omega_t e^{\alpha p\omega}dx\\ &= \delta\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx+\int_\Omega\left\{p\rho(M-u)\left[\alpha+\beta(\omega+1)^{-1}\right]-\gamma\right\}F\left(u,\omega\right)(M-u)^{-\gamma-1}\left(\omega+1\right)^{\beta p}e^{\alpha p\omega}dx\\ &\quad+\int_\Omega\left\{\left[a\gamma(M-u)^{-\gamma-1}(w+1)^{\beta p}\right]\Delta u+pd(M-u)^{-\gamma}\ \left[\beta(\omega+1)^{\beta p-1}+\alpha(w+1)^{\beta p}\right]\ \Delta\omega\right\}e^{\alpha p\omega}d\\ &\quad+\int_\Omega\mu\left\{\gamma\left(M-u\right)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}-u\right)-p\left[\alpha+\beta\left(\omega+1\right)^{-1}\right]\omega\right\}\left(M-u\right)^{-\gamma}\ \left(w+1\right)^{\beta p}e^{\alpha p\omega}dx.\end{aligned}$$

Par une simple utilisation de la formule de Green, nous avons

$$\frac{d}{dt}L(t)=\delta\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx+I+J,$$

tels que

$$I = -\int_\Omega T(\nabla u, \nabla w)\,(M-u)^{-\gamma-2}\,(\omega+1)^{\beta p}\,e^{\alpha p\omega}dx.$$

Où

$$\begin{aligned} T(\nabla u, \nabla w) &= a\gamma\,(\gamma+1)\,|\nabla u|^2 + \gamma p\,(a+d)\,(M-u)\left[\alpha+\beta\,(w+1)^{-1}\right]\nabla u\nabla w \\ &\quad + dp\,(M-u)^2\left\{\alpha^2 p + 2\alpha\beta p\,(\omega+1)^{-1} + \beta\,(p\beta-1)^{-2}\right\}|\nabla\omega|^2. \end{aligned}$$

Le discriminant de T est donné par

$$D = \gamma p\,(d-a)^2\,(M-u)^2\left\{\beta\left[\beta p\,(\gamma-\overline{\gamma}) + \overline{\gamma}\,(1+\gamma)\right](\omega+1)^{-2} + \alpha^2 p\,(\gamma-\overline{\gamma})\left[\alpha+2\beta\,(w+1)^{-1}\right]\right\},$$

d'après la condition (4.19), nous avons $D \leq 0$, alors la forme quadratique est positive et par conséquent

$$I \leq 0. \tag{4.22}$$

Maintenant calculons le terme J

$$\begin{aligned} J &= \int_\Omega \mu\left\{\gamma\,(M-u)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}-u\right) - p\left[\alpha+\beta\,(\omega+1)^{-1}\right]\omega\right\}(M-u)^{-\gamma}\,(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega}dx \\ &\quad + \int_\Omega \left\{\rho p\,(M-u)\left[\alpha+\beta\,(\omega+1)^{-1}\right] - \gamma\right\}F(u,\omega)\,(M-u)^{-\gamma-1}\,(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega}dx. \end{aligned}$$

En ce qui conserve le terme J, depuis $\left(0 \leq u \leq \frac{\lambda}{\mu} < M\right)$, nous observons que

$$\begin{aligned} J &\leq \int_\Omega \mu\left(\gamma - p\left[\alpha+\beta\,(\omega+1)^{-1}\right]\omega\right)(M-u)^{-\gamma}\,(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega}dx \\ &\quad + \left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}\int_\Omega \left(pM\left[\alpha+\beta\,(\omega+1)^{-1}\right]-\gamma\right)F(u,\omega)\,(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega}dx \\ &\leq \left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}\int_\Omega \left[\beta pM - (\gamma-\alpha pM)\,(\omega+1)\right]F(u,\omega)\,(\omega+1)^{\beta p-1}\;e^{\alpha p\omega}dx \\ &\quad + \mu\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\int_\Omega \left\{\gamma+1-p\left[\alpha+\beta\,(\omega+1)^{-1}\right]\omega\right\}(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega}dx \\ &\quad - \int_\Omega \mu\,(M-u)^{-\gamma}\,(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega} + \mu\delta u - \mu\delta u dx \\ &\leq -\mu L(t) + \delta\lambda\,|\Omega| + \mu\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\int_\Omega \left\{\gamma+1-p\left[\alpha+\beta\,(\omega+1)^{-1}\right]\omega\right\}(\omega+1)^{\beta p}\;e^{\alpha p\omega}dx \\ &\quad + \left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}\int_\Omega \left[\beta pM - (\gamma-\alpha pM)\,(\omega+1)\right]F(u,\omega)\,(\omega+1)^{\beta p-1}\;e^{\alpha p\omega}dx. \end{aligned}$$

De (4.19), nous obtenons $\left(\frac{n}{2} < \frac{\gamma}{\alpha M}\right)$, alors nous pouvons choisir p tels que$\left(\frac{n}{2} < \frac{\gamma}{\alpha M}\right)$.

On pose

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \left(\gamma+1-p\left[\alpha+\beta\left(\omega+1\right)^{-1}\right]\omega\right)\left(\omega+1\right)^{\beta p}\ e^{\alpha p\omega}.\\ \delta_2 &= \left[\beta pM-\left(\gamma-\alpha pM\right)\left(\omega+1\right)\right]\left(\omega+1\right)^{\beta p-1}\ e^{\alpha p\omega}.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}J &\leq -\mu L\left(t\right)+\delta\lambda\left|\Omega\right|+\mu\delta_1\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\int_\Omega 1dx+\delta_2\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}\int_\Omega F(u,\omega)dx\\ &\leq -\mu L\left(t\right)+\delta\lambda\left|\Omega\right|+\mu\delta_1\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\left|\Omega\right|+\delta_2\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}\int_\Omega F(u,\omega)dx\\ &\leq -\mu L\left(t\right)+\left[\lambda\delta+\mu\delta_1\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\right]\left|\Omega\right|+\delta_2\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}\int_\Omega F(u,\omega)dx.\end{aligned}$$

Soit $\delta=\delta_2\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma-1}$, et en utilisant le lemme (4.2). On obtient

$$J\leq -\mu L\left(t\right)+\left[\lambda\delta+\mu\delta_1\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\right]\left|\Omega\right|+\delta\lambda\left|\Omega\right|-\delta\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx. \tag{4.23}$$

De $(4,23)$ et (4.24), nous concluons que

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -\mu L\left(t\right)+\sigma,$$

où $\sigma=\left(2\lambda\delta+\mu\delta_1\left(M-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\gamma}\right)\left|\Omega\right|$. ■

Preuve. de théorème (4.3) [6]

Soit p le même que dans la proposition (4.1), depuis $M^{-\gamma}\leq\left(M-u\right)^{-\gamma}$ de (4.19) et (**A3**), il en résulte que

$$\left\|\omega\right\|_p^p=\int_\Omega\left|\omega\right|^p dx\leq M^\gamma L\left(t\right),$$

$$\left\|F\left(u,\omega\right)\right\|_p^p=\int_\Omega\left|F(u,\omega\right|^p dx\leq M^\gamma K^p L\left(t\right).$$

Où $K=\max\limits_{0\leq\xi\leq\frac{\lambda}{\mu}}\zeta\left(\xi\right).$

En effet que

$\forall\alpha,\beta,\delta>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|\omega\right|^p dx &\leq \int_\Omega\left(\omega+1\right)^{\beta p}e^{\alpha p\omega}dx,\ \text{tel que}\\ &\leq \left(M-u\right)^\gamma\int_\Omega\left[\delta u+\left(M-u\right)^{-\gamma}\left(\omega+1\right)^{\beta p}\right]dx\\ &\leq \left(M-u\right)^\gamma L\left(t\right)\\ &\leq M^\gamma L\left(t\right).\end{aligned}$$

De même façon on obtient

$$\|F(u,\omega)\|_p^p = \|f(u,v)\|_p^p,$$

alors

$$F(u,\omega) \leq c\zeta(u)\,\omega^\beta e^{\alpha\omega}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |F(u,\omega|^p\,dx \leq K^p (M-u)^\gamma L(t), \text{ où } K = \max_{0\leq u\leq \frac{\lambda}{\mu}} \zeta(u).$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |F(u,\omega|^p\,dx \leq K^p M^\gamma L(t), \text{ où } K = \max_{0\leq u\leq \frac{\lambda}{\mu}} \zeta(u).$$

Par (4.20), on voit qu'il existe une constante positive β tels que

$$L(t) \leq \beta \quad \forall t \in [0,T^*],$$

et par conséquent

$$\|\omega\|_p^p \leq \beta M^\gamma,$$

$$\|F(u,\omega)\|_p^p \leq M^\gamma K^p \beta.$$

Par conséquent $\rho F(u(t,.),\omega(t,.)) - \mu\omega(t,.)$ est uniformément bornée dans $L^p(\Omega)$ pour tous $t \in [0,T^*[$, avec $p > \frac{n}{2}$.

En utilisant les résultats de régularité des solutions des équations parabolique (**voir théorème 1.4**), nous concluons que les solutions du problème (4.11)-(4.13) sont uniformément bornées sur $[0,+T^*[\times \Omega$. ■

4.3 Existence globale de solutions pour des systèmes de Réaction-diffusion à matrice pleine

Considérons le système parabolique semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u - d_2\Delta v = f(u,v) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_3\Delta u - d_4\Delta v = g(u,v) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \end{cases} \tag{4.24}$$

Avec des conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{4.25}$$

et les données initiales

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.26}$$

tel que $(u_0(x),\ v_0(x))$ non négative, où Ω est un domaine borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n\ (n \geq 1)$, $u = u(t,x), v = v(t,x),\ x \in \Omega,\ t > 0$ sont des fonctions à valeur réelle, Δ désigne l'opérateur Laplacien, et les constantes de diffusion $d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4$ sont supposées être non négative.
Concernant les fonctions f et g, nous supposons les hypothèses suivantes.
$(\mathbf{H1})$: $f(r,s)$ et $g(r,s)$ sont continûment différentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que

$$f(0,s) \geq 0,\ g(r,s) \geq 0,\ \forall r,s \geq 0, \tag{4.27}$$

$(\mathbf{H2})$: Supposons en outre qu'il existe un nombre entier $\forall p \geq 1$ tel que

$$\begin{cases} a/\ K^{2i-1} f(r,s) + g(r,s) \leq C(r+s+1) \quad i = 1 \ldots p, \\ b/\ \sup(|f(r,s)|, |g(r,s)|) \leq C(r+s+1)^m,\ \forall r,s \geq 0,\ m \geq 1.\ [19] \end{cases} \tag{4.28}$$

4.3.1 Existence Locale et positivité de solutions

L'étude de l'existence locale et l'unicité de solutions (u,v) de (4.24)-(4.26) résulte du théorème d'existence pour des équations linéaires semi-paraboliques (voir eg. [8], [3]). En conséquence, pour les données initiales dans L^∞ il existe $T_{\max} \in (0,+\infty)$ tel que (4.24)-(4.26) a une solution unique classique sur $(0.T_{\max}[\times \Omega$. En outre.

Remarque 4.1 [19] *Sous la condition* $(\mathbf{H1})$ *il résulte par la méthode de la région invariant que le système* (4.24)-(4.26) *préserve la positivitée. En d'autres termes, si les données initiales* u_0 *et* v_0 *dans* (4.26) *sont non négative, alors les fonctions* u *et* v *de la solution correspondante de* (4.24)-(4.26) *sont également non négative sur* $]0, T_{\max}[\times \Omega$ ***Voir*** *(D. Henry* [8]).

4.3.2 Existence Globale

Utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov à croissance polynômiale

Théorème 4.4 (***Voir M. Mebarki & A. Moumeni*** [19])
Soit $p > \frac{m.n}{2}$. *Supposons que la condition* ***(H2)*** *est satisfaite. Alors la solution* $(u(t,.), v(t,.))$ *de système (4.24)-(4.26) avec les conditions initiales positives dans* $L^\infty(\Omega)$ *est existe globalement en temps.*
Nous notons que pour prouver le théorème (4.4), il suffit de calculer une estimation uniforme de $\sup\left(\|f(u,v)\|_q, \|g(u,v)\|_q\right)$ *pour certains* $q > \frac{n}{2}$. *(Pour plus de détails* ***voir*** *[8]).*
Le lemme suivant est un outil utile dans la démonstration du théorème (4.4).

Lemme 4.3 [19] *Soit* $(u(t,x), v(t,x))$ *la solution de* [(4.24)-(4.26)] *et soit*

$$L(t) = \int_\Omega \sum_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i} dx,$$

avec p *entier positif et* K *est une série de nombre positifs tel que* $K \geq \max\left(\frac{d_1+d_4}{2\sqrt{d_1 d_4}}, \frac{d_2+d_3}{2\sqrt{d_3 d_2}}\right)$. *Alors la fonction* L *est uniformément bornée sur l'intervalle* $[0, T^*)$, $T^* \leq T_{\max}$.

Preuve. [19] Dérivons L par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \int_\Omega \sum_{i=0}^{p} i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} u_t dx + \int_\Omega \sum_{i=0}^{p} (p-i) C_p^i K^{i^2} v^{p-i-1} u^i v_t dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} i \left(C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i}\right) (f(u,v) + d_1 \Delta u + d_2 \Delta v) dx + \\
&\quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{p-1} (p-i) \left(C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i-1}\right) (g(u,v) + d_3 \Delta u + d_4 \Delta v) dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} i \left(C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i}\right) (f(u,v) + d_1 \Delta u + d_2 \Delta v) dx + \\
&\quad \int_\Omega \sum_{m=1}^{p} (p-m+1) \left(C_p^{m-2} K^{(m-1)^2} v^{p-m} u^{m-1}\right) (g(u,v) + d_3 \Delta u + d_4 \Delta v) dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} i \left(C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i}\right) (f(u,v) + d_1 \Delta u + d_2 \Delta v) dx + \\
&\quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} (p-i+1) \left(C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} v^{p-i} u^{i-1}\right) (g(u,v) + d_3 \Delta u + d_4 \Delta v) dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \left[i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} f(u,v) + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} v^{p-i} u^{i-1} g(u,v)\right] dx + \\
&\quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \left[i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} d_1 + (p-i-1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} v^{p-i} u^{i-1} d_3\right] \Delta u dx + \\
&\quad \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \left[i C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} d_2 + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} v^{p-i} u^{i-1} d_4\right] \Delta v dx.
\end{aligned}$$

Par une simple utilisation de la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \left[iC_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i} f(u,v) + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} v^{p-i} u^{i-1} g(u,v) \right] dx - \\
&\int_\Omega \sum_{i=2}^{p} \left[\left(iC_p^i K^{i^2} d_1 \right) + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} d_3 \right] \left[(i-1) u^{i-2} v^{p-i} \right] |\nabla u|^2 dx - \\
&\int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \left[\left(iC_p^i K^{i^2} d_2 \right) + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} d_4 \right] \left[(p-i) u^{i-1} v^{p-i-1} \right] |\nabla v|^2 dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i=1}^{p-1} \left[\left(iC_p^i K^{i^2} d_1 \right) + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} d_3 \right] \left[(p-i) u^{i-1} v^{p-i-1} \right] \nabla u \nabla v dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i=2}^{p} \left[\left(iC_p^i K^{i^2} d_2 \right) + (p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} d_4 \right] \left[(i-1) u^{i-2} v^{p-i} \right] \nabla u \nabla v dx \\
&= I + J + H,
\end{aligned}$$

telles que

$$I = -\int_\Omega \left(A |\nabla u|^2 + B \nabla u \nabla v + C |\nabla v|^2 \right) dx, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=2}^{p} d_1 i (i-1) C_p^i K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i}. \\
B &= \sum_{i=1}^{p-1} d_1 i (p-i) C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1} + \sum_{i=2}^{p} d_4 (i-1)(p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}. \\
C &= \sum_{i=1}^{p-1} d_4 (p-i)(p-i+1) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i-1}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$iC_p^i = (p-i+1) C_p^{i-1} = pC_{p-1}^{i-1} \ \forall i = 1, \cdots, p, \tag{4.30}$$

et

$$(i-1) C_{p-1}^{i-1} = (p-1) C_{p-2}^{i-2} \tag{4.31}$$

et

$$i(i-1)C_p^{i+1} = i(p-i) C_p^i = (p-i)(p-i+1) C_p^{i-1} = p(p-1)C_{p-2}^{i-2}. \tag{4.32}$$

On obtient

$$A = \sum_{i=2}^{p} d_1 p(p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i},$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{p-1} d_1 p(p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1} + \sum_{i=2}^{p} d_4 p(p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}, \\ &= B_1 + B_2. \end{aligned}$$

$$C = \sum_{i=1}^{p-1} d_4 p\,(p-1)\, C_{p-2}^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-(i+1)},$$

Posons $j = i-2$, on obtient

$$A = \sum_{j=0}^{p-2} d_1 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{(j+2)^2} u^j v^{p-j-2},$$

$$B_2 = \sum_{j=0}^{p-2} d_4 p\,(p-1)\, C_{p-2}^{j} K^{(j+1)^2} u^j v^{p-j-2},$$

et posons $j = i-1$, nous avons

$$C = \sum_{j=0}^{p-2} d_4 p\,(p-1)\, C_{p-2}^{j} K^{j^2} u^j v^{p-j-2},$$

$$B_1 = \sum_{j=0}^{p-2} d_1 p(p-1) C_{p-2}^{j} u^j v^{p-j-2} K^{(j+1)^2}.$$

Par conséquent

$$I = -\sum_{j=0}^{p-2} p\,(p-1)\, C_{p-2}^{j} \left[K^{(j+2)^2} d_1 \left|\nabla u\right|^2 + (d_1+d_4)\, K^{(j+1)^2} \nabla u \nabla v + K^{j^2} d_4 \left|\nabla v\right|^2 \right] u^j v^{p-j-2} dx,$$

alors

$$I = -\,(p-1) \sum_{j=0}^{p-2} C_{p-2}^{j} \int_{\Omega} u^j v^{p-j-2}.T\,(\nabla u, \nabla v)\, dx. \tag{4.33}$$

Quand $T\,(\nabla u, \nabla v) = d_1 K^{(j+2)^2} \left|\nabla u\right|^2 + (d_1+d_4)\, K^{(j+1)^2} \nabla u \nabla v + d_4 K^{j^2} \left|\nabla v\right|^2$.
Les formes quadratiques sont positives si

$$\left((d_1+d_4)\, K^{(j+1)^2} \right)^2 - 4 d_1 d_4 K^{j^2} K^{(j+2)^2} \leq 0 \quad j = 0, \cdots, p-2, \tag{4.34}$$

en effet

$$K^{2(j+1)^2} \left[(d_1+d_4)^2 - 4 d_1 d_4 \frac{K^{j^2} K^{(j+2)^2}}{K^{2(j+1)^2}} \right] \leq 0,$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (d_1+d_4)^2 - 4 d_1 d_4 K^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{d_1+d_4}{2\sqrt{d_1 d_4}} \leq K. \end{aligned}$$

Pour $j = 0, \cdots, p-2$, tel que $\left(K \geq \max\left(\frac{d_1+d_4}{2\sqrt{d_1 d_4}}, \frac{d_2+d_3}{2\sqrt{d_3 d_2}} \right) \right)$.
on déduit que

$$I \leq 0. \tag{4.35}$$

De même manière nous trouvons

$$J = -\int_\Omega \left(D\left|\nabla v\right|^2 + E\Delta u \Delta v + F\left|\nabla u\right|^2 dx \right), \tag{4.36}$$

tel que

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{p-1} d_2 i\,(p-i)\, C_p^i K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1}, \\ E &= \sum_{i=2}^{p} d_2 i(i-1) C_p^i K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p-1} d_3\,(p-i)\,(p-i+1)\, C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i-1}, \end{aligned}$$

et

$$F = \sum_{i=2}^{p} d_3\,(i-1)\,(p-i+1)\, C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}.$$

D'autre part, par $[(4.30)$ - $(4.32)]$, nous avons

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{p-1} d_2 p(p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{i^2} u^{i-1} v^{p-i-1}, \\ E &= \sum_{i=2}^{p} d_2 p(p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{i^2} u^{i-2} v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p-1} d_3 p\,(p-1)\, C_{p-2}^{i-1} K^{(i-1)^2} u^{i-1} v^{p-i-1} \\ &= E_1 + E_2, \end{aligned}$$

et

$$F = \sum_{i=2}^{p} d_3 p(p-1) C_{p-2}^{i-2} K^{(i-1)^2} u^{i-2} v^{p-i}.$$

Posons $j = i-1$, nous trouvons

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=0}^{p-2} d_2 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{(j+1)^2} u^{j} v^{p-j-2}, \\ E_2 &= \sum_{j=0}^{p-2} d_3 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{j^2} u^{j} v^{p-j-2}, \end{aligned}$$

et posons $j = i-2$, on obtient

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{j=0}^{p-2} d_2 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{(j+2)^2} u^{j} v^{p-j-2}, \\ F &= \sum_{j=0}^{p-2} d_3 p(p-1) C_{p-2}^{j} K^{(j+1)^2} u^{j} v^{p-j-2}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$J = -p(p-1)\sum_{j=0}^{p-2} C_{p-2}^{j} \int_{\Omega} u^{j} v^{p-j-2}.T\left(\nabla u, \nabla v\right) dx, \tag{4.37}$$

tel que

$$T\left(\nabla u, \nabla v\right) = d_2 K^{(j+1)^2} \left|\nabla v\right|^2 + \left(d_2 K^{(j+2)^2} + d_3 K^{j^2}\right) \nabla u \nabla v + d_3 K^{(j+1)^2} \left|\nabla u\right|^2.$$

Les formes quadratiques sont positives si

$$\left[\left(d_2 K^{(j+2)^2} + d_3 K^{j^2}\right)\right]^2 - 4 d_2 d_3 K^{(j+1)^2} K^{(j+1)^2} \leq 0 \quad j = 0, \cdots, p-2. \tag{4.38}$$

Pour $j = 0, \cdots, p-2$ tel que $\left(K \geq \max\left(\frac{d_1 + d_4}{2\sqrt{d_1 d_4}}, \frac{d_2 + d_3}{2\sqrt{d_3 d_2}}\right)\right)$. On résulte que

$$J \leq 0. \tag{4.39}$$

Maintenant calculons H

$$H = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p} \left[i C_p^i K^{i^2} f\left(u, v\right) + \left(p - i + 1\right) C_p^{i-1} K^{(i-1)^2} g\left(u, v\right)\right] \left[u^{i-1} v^{p-i}\right] dx.$$

En utilisant les relations $\left[\left(4.30\right), \left(4.32\right)\right]$, on obtient

$$H = \int_{\Omega} \left[p \sum_{i=1}^{p} \left(K^{i^2} f\left(u, v\right) + K^{(i-1)^2} g\left(u, v\right)\right) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i}\right] dx,$$

d'après la formule $(4.28\text{-}a)$, nous avons

$$H \leq c_3 \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} \left(u + v + 1\right) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i}\right] dx, \tag{4.40}$$

en effet

$$H = \int_{\Omega} \left[p \sum_{i=1}^{p} \left(K^{i^2} f\left(u, v\right) + K^{(i-1)^2} g\left(u, v\right)\right) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i}\right] dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{K^{(i-1)^2}} &= \int_{\Omega} \left[p \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{K^{i^2}}{K^{(i-1)^2}} f(u, v) + g(u, v)\right) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i}\right] dx, \text{ pour } i = 1, ..., p \\ &= \int_{\Omega} \left[p \sum_{i=1}^{p} \left(K^{2i-1} f(u, v) + g(u, v)\right) C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i}\right] dx, \text{ pour } i = 1, ..., p, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} H &\leq K^{(i-1)^2} Cp \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} (u+v+1)\, C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx, \quad \text{pour } i = 1, ..., p \\ &\leq c_3 \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} (u+v+1)\, C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx, \ \text{où } c_3 = \max_{1\leq i\leq p} K^{(i-1)^2}. \end{aligned}$$

Pour démontrer que la fonction L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$. Nous écrivons premièrement

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq c_3 \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} (u+v+1)\, C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx \\ &\leq c_3 \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i} v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i+1} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right] dx \\ &\leq c_3 \int_\Omega \left[\sum_{i=0}^{p} C_{p}^{i} u^{i} v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^{i} v^{p-i-1} \right] dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^{i} v^{p-i-1} = (u+v)^{p-1},$$

par conséquent la dernière inégalité s'écrit par la forme

$$L'(t) \leq c_1(p) L(t) + c_3 \int_\Omega (u+v)^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité Hölder en deuxième terme dans le coté droit, nous obtenons

$$L'(t) \leq c_1(p) L(t) + c_3 \left\{ \left[\int_\Omega (1)^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega \left((u+v)^{p-1} \right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

On a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1},$$

donc

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq c_1(p) L(t) + c_3 \left\{ \left[\int_\Omega (1)^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega (u+v)^p \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \right\} \\ &= c_1(p) L(t) + c_3 \left| \Omega \right|^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (u+v)^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Depuis l'inégalité suivante est

$$(u+v)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i u^i v^{p-i} \leq \frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}} \sum_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i},$$

remplaçons dans la dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq c_1(p)L(t) + c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i} \right)^{\frac{p-i}{p}} \\ &\leq c_1(p)L(t) + c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}} \right)^{\frac{p-1}{p}} (L(t))^{\frac{p-1}{p}}, \forall t \leq T_{\max}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $L(t)$ la fonctionnelle satisfait l'inégalité différentielle suivant

$$L'(t) \leq c_1(p)L(t) + c_2(p) (L(t))^{\frac{p-1}{p}}, \ \forall t < T_{\max}, \tag{I}$$

tel que

$$c_2(p) = c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i K^{i^2}} \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

posons $z^p = L(t)$, alors l'inégalité (I) implique

$$\begin{aligned} & pz^{p-1}z' \leq c_1(p)z^p + c_2(p)z \\ \Leftrightarrow \quad & z' \leq \frac{c_1(p)}{p} z + \frac{c_2(p)}{p} \\ \Leftrightarrow \quad & z' \leq c_1'(p)z + c_2'(p), \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} & c_1'(p) = \frac{c_1(p)}{p}, \ c_2'(p) = \frac{c_2(p)}{p}, \\ \Leftrightarrow & \frac{z'}{c_1'(p)z + c_2'(p)} \leq 1. \end{aligned}$$

Par intégrant l'inégalité entre 0 et t, on obtient

$$z(t) \leq \left[z(0) + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right] \exp(c_1'(p)t) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)},$$

ce la implique que

$$[L(t)]^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ [L(0)]^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right\} \exp(c_1'(p)t) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)}. \tag{4.41}$$

Donc la fonctionnelle $L(t)$ est majorée sur l'intervalle $[0,T^*]$, tel que T^* est le temps maximal. Cette majoration est valable pour tout $t \in [0,T^*]$ et pour tout domaine Ω, donc la fonctionnelle $L(t)$ est uniformément bornée sur $[0,T^*]$.
En utilisant l'inégalité

$$L(t) = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i K^{i^2} u^i v^{p-i} \right) dx \geq \int_\Omega \left(C_p^p K^{p^2} u^p + C_p^0 K^{0^2} v^p \right) dx,$$

on résulte que

$$L(t) \geq \min\left(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2} \right) \sup \left(\int_\Omega u^p dx, \int_\Omega v^p dx \right).$$

Par conséquent

$$[L(t)]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\min\left(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \sup\left(\|u(t,x)\|_p, \|v(t,x)\|_p \right)$$

$$\Leftrightarrow \sup\left(\|u(t,x)\|_p, \|v(t,x)\|_p \right) \leq \frac{[L(t)]^{\frac{1}{p}}}{\left[\min\left(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2} \right) \right]^{\frac{1}{p}}}, \ \forall t < T_{\max} \tag{4.42}$$

$$\Leftrightarrow \sup\left(\|u(t,x)\|_p, \|v(t,x)\|_p \right) \leq c(t), \ \forall t < T_{\max}, \tag{4.43}$$

tel que

$$c(t) = \frac{1}{\left[\min\left(C_p^0 K^{0^2}, C_p^p K^{p^2} \right) \right]^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left[[L(0)]^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right] \exp\left(c_1'(p) t \right) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right\}.$$

■

Preuve. (de Théorème (4.4)) [19]
À partir de (4.28,b), nous avons

$$\sup\left(|f(u,v)|, |g(u,v)| \right) \leq c_2 (u+v+1)^m, \ \forall u,v \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \sup\left(|f(u,v)|, |g(u,v)| \right)^{\frac{p}{m}} dx \leq (c_2)^{\frac{p}{m}} \int_\Omega (u+v+1)^p dx$$

$$\Leftrightarrow \sup\left(\int_\Omega |f(u,v)|^{\frac{p}{m}} dx, \int_\Omega |g(u,v)|^{\frac{p}{m}} dx \right) \leq (c_2)^{\frac{p}{m}} \int_\Omega (u+v+1)^p dx, \tag{4.44}$$

d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u+v+1)^p\,dx &= \int_\Omega \sum_{k=0}^{p} (1)^{p-k} C_p^k (u+v)^k\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{k=0}^{p} C_p^k (u+v)^k\,dx \\ &= \int_\Omega [1+(u+v)]\,dx + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int_\Omega (u+v)^k\,dx.\end{aligned}$$

Par l'application de l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int_\Omega (u+v)^k\,dx \le \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left[\int_\Omega \left(1^{\frac{p}{p-k}}dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \left(\int_\Omega (u+v)^p\,dx\right)^{\frac{k}{p}}\right],$$

par conséquent

$$\int_\Omega (u+v+1)^p\,dx \le |\Omega| + \int_\Omega (u+v)^p\,dx + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left[|\Omega|^{\frac{p-k}{p}} \left(\int_\Omega (u+v)^p\,dx\right)^{\frac{k}{p}}\right], \tag{4.45}$$

par usage (4.43) , nous avons

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega (u+v)^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} &= \|u(t,x)+v(t,x)\|_p \\ &\le \|u(t,x)\|_p + \|v(t,x)\|_p \\ &\le 2c(t).\end{aligned}$$

En utilisant la formule

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u+v+1)^p\,dx &\le |\Omega| + 2^p (c(t))^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left[|\Omega|^{\frac{p-k}{p}} (2c(t))^k\right] \\ &\le \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left[|\Omega|^{\frac{p-k}{p}} (2c(t))^k\right],\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sup\left(\|f(u,v)\|_{\frac{\frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}}, \|g(u,v)\|_{\frac{\frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}}\right) \le c^{\frac{p}{m}} \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left[|\Omega|^{\frac{p-k}{p}} (2c(t))^k\right] \tag{4.46}$$

$$\Leftrightarrow \sup\left[\|f(u,v)\|_{\frac{p}{m}}, \|g(u,v)\|_{\frac{p}{m}}\right] \le c_{p,m}(t),\ \forall t < T_{\max}, \tag{4.47}$$

où

$$c_{p,m} = c\left[\sum_{k=0}^{p} 2^k C_p^k \left[|\Omega|^{\frac{p-k}{p}} \left(c(t)\right)^k\right]\right]^{\frac{m}{p}}.$$

■

Remarque 4.2 [19] *De deux Lemme (4.4) et le théorème (4.4), nous avons obtenu une estimation uniforme de* $\sup\left(\|f(u,v)\|_q, \|g(u,v)\|_q\right)$ *avec* $q = \frac{p}{m} > \frac{n}{2}$. *Par le théorème de l'effet régularisant, nous concluons que la solution du problème donné existe globalement en temps.*

Chapitre 5

Comportement asymptotique de solutions

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique de solutions pour des équations d'évolution et quelques systèmes de réaction-diffusion.

5.1 Comportement asymptotique de solutions pour quelques équations d'évolution

5.1.1 Exemple d'explosion en temps fini

Considérons l'équation de la chaleur parabolique semi-linéaire suivant

$$u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) = f(u), \quad x \in \Omega,\ t > 0. \tag{5.1}$$

Avec la condition aux limite

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{5.2}$$

et la donnée initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.3}$$

Où $m > 2$, f est une fonction continue, et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Ici, nous montrons que l'explosion peut obtenu même pour disparaitre énergie. Plus précisément, nous aurons l'explosion à condition

$$\frac{1}{m}\int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^m \, dx - \int_{\Omega} F(u_0(x))\, dx \leq 0. \ [27] \tag{5.4}$$

Proposition 5.1 [27] *Soit f dans $C(\mathbb{R})$ satisfaisait*

$$|f(u)| \leq g(u), \tag{5.5}$$

pour g une fonction de classe C^1. Alors pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, le problème (5.1)-(5.3) a une solution

$$\begin{cases} u \in L^\infty(\Omega \times (0.T)) \cap L^m((0.T), H_0^m(\Omega)), \\ u_t \in L^2(\Omega \times (0,T)). \end{cases} \tag{5.6}$$

Théorème 5.1 *voir (Salim A. Messaoudi [27])*

Soit f dans $C(\mathbb{R})$ satisfaisant (5.5) et

$$pF(u) \leq uf(u), \quad p > m > 2, \tag{5.7}$$

alors pour tout u_0 non nul tel que $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ et satisfaisant (5.4), alors la solution (5.6) est explosée en temps fini.

Remarque 5.1 [27] *Un exemple de fonction f satisfait (5.7) est $f(s) = |s|^{p-2}s$, pour $p > m > 2$. Cela montrons que dans un sens la source doit dominer le m terme laplacien.*

Preuve. [27] *En multipliant l'équation (5.1) par u et intégrant sur Ω, on obtient*

$$\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega \nabla\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) u dx = \int_\Omega |u|^{p-2} u^2 dx,$$

par l'utilisation de la formule de ***Green,*** *on obtient*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^m dx = \int_\Omega |u|^p dx,$$

cela implique que

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 = \|u\|_p^p - \|\nabla u\|_m^m.$$

Nous définissons

$$H(t) = \int_\Omega F(u) dx - \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u|^m dx,$$

posons

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{p}|u|^p \\ &= \frac{1}{p}|u|^{p-2}uu \\ &= \frac{1}{p}f(u)u, \end{aligned}$$

alors F satisfait la condition (5.7), donc

$$H(t) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^m dx,$$

dérivons H par rapport à t et utilisons la formule de ***Green*** *on obtient*

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} u_t dx - \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^{m-1} \nabla u_t(x,t)\, dx \\ &= \int_\Omega |u(x,t)|^{p-2} u_t(x,t)\, u(x,t)\, dx - \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^{m-2} \nabla u(x,t)\, \nabla u_t(x,t)\, dx \\ &= \int_\Omega |u(x,t)|^{p-2} u_t(x,t)\, u(x,t)\, dx + \int_\Omega \operatorname{div}\left(|\nabla u(x,t)|^{m-2} \nabla u(x,t)\right) u_t(x,t)\, dx \\ &= \int_\Omega \left[|u(x,t)|^{p-2} u(x,t) + \operatorname{div}\left(|\nabla u(x,t)|^{m-2} \nabla u(x,t)\right)\right] u_t(x,t)\, dx \\ &= \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$H(t) \geq H(0).$$

On définit la fonctionnelle $\phi(t)$ par

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\, dx,$$

dérivons ϕ par rapport à t, on obtient

$$\phi'(t) = \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx,$$

en utilisant l'équation (5.1) *on obtient*

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_\Omega u(x,t)\left[\operatorname{div}\left(|\nabla u(x,t)|^{m-2} \nabla u(x,t)\right) + |u|^{p-2} u\right] dx \\ &= \|u\|_p^p - \|\nabla u\|_m^m \\ &= \|u\|_p^p - \frac{p}{m}\|\nabla u\|_m^m + \frac{p}{m}\|\nabla u\|_m^m - \|\nabla u\|_m^m \\ &= pH(t) + \left(\frac{p}{m} - 1\right)\|\nabla u\|_m^m. \end{aligned}$$

Alors

$$\phi'(t) \geq \left(\frac{p}{m} - 1\right)\left[H(t) + \|\nabla u\|_m^m\right], \tag{5.8}$$

clairement

$$H(t) + \|\nabla u\|_m^m \leq \frac{m}{p-m}\phi(t).$$

Estiment $\phi^{\frac{m}{2}}(t)$

$$\phi^{\frac{m}{2}}(t) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \|u\|_2^m ,$$

par l'application de Inégalité de ***point Carré*** *et de l'intégration de l'espace* L^q*, on obtient*

$$\phi^{\frac{m}{2}}(t) \leq c' \|u\|_m^m \leq c \|\nabla u\|_m^m ,$$

tel que c *est une constante dépendant de* Ω *et* $m > 2$*. Par conséquent, nous avons*

$$\phi^{\frac{m}{2}}(t) \leq c\left[H(t) + \|\nabla u\|_m^m\right]. \tag{5.9}$$

En combinant entre (5.8) *et* (5.9) *nous avons*

$$\phi'(t) \geq \gamma \phi^{\frac{m}{2}}(t), \text{ où } \gamma = \frac{(p-m)}{cm}. \tag{5.10}$$

En intégrant (5.10) *sur l'intervalle* $[0.T]$*, on obtient*

$$\int_0^t \phi'(s)\, \phi^{-\frac{m}{2}}(s)\, ds \geq \int_0^t \gamma ds. \tag{5.11}$$

On a

$$\left(\phi^{1-\frac{m}{2}}\right)' = \frac{2-m}{2}\left(\phi'(s)\, \phi^{-\frac{m}{2}}(s)\right),$$

alors (5.11) *implique que*

$$\frac{2}{2-m}\int_0^t \left(\phi^{1-\frac{m}{2}}\right)' ds \geq \int_0^t \gamma ds$$

$$\Rightarrow \phi^{1-\frac{m}{2}}(t) \leq -\gamma_1 t + \phi^{1-\frac{m}{2}}(0), \quad \text{où} \quad \gamma_1 = \frac{(m-2)}{2}\gamma.$$

Finalement on obtient

$$\phi^{\frac{m}{2}-1}(t) \geq \frac{1}{\phi^{1-\frac{m}{2}}(0) + -\gamma_1 t},$$

alors ϕ *explose en temps fini*

$$t^* \leq \frac{1}{\phi^{1-\frac{m}{2}}(0) + -\gamma_1 t}.$$

■

Corollaire 5.1 [27] *S'il existe* $t_0 \geq 0$*, pour que*

$$\frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u(x,t_0)|^m dx - \int_\Omega F(u(x,t_0))\, dx = 0,$$

alors la solution (5.6) *reste égale à zéro pour tout les temps* $t \geq t_0$ *ou explose en un temps fini* $t^* > t_0$*.*

5.2 Comportement asymptotique de solutions pour quelques systèmes de réaction-diffusion

5.2.1 Exemple d'un système à matrice diagonale

Nous considérons le système parabolique de Réaction-Diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -f(u;v) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = f(u,v) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \end{cases} \tag{S_1}$$

Avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{5.12}$$

et les données initiales

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad v(0,x) = v_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.13}$$

Où Ω est un domaine borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$. d_1, d_2 sont des constantes positives non nulles. Les données initiales sont supposées non négatives appartiennent à $L^\infty(\Omega)$. La fonction $f(u,v)$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et non négative qui est vérifiée $f(0,s) = 0$, pour tout $s \geq 0$. [21]

Théorème 5.2 [21] *Soit (u,v) une solution globale du système (S_1), alors il y a deux constantes non négatives k_1 et k_2 telles que*

$$\|u - k_1\|_\infty \to 0 \ \text{ et } \ \|v - k_2\|_\infty \to 0.$$

En outre, nous avons $f(k_1,k_2) = 0$ et

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (u_0 + v_0)\,dx.$$

Pour établir ce résultat, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 5.1 [21] *Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, alors*

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

Preuve. [21] Supposons que nous avons

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = c,$$

tel que c est une constante, alors $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ t_\varepsilon$ tel que $\forall\ t > t_\varepsilon$ nous avons

$$\varphi(t) - c \geq -\varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = \frac{c}{2}$, alors

$$\varphi(t) \geq \frac{c}{2}.$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt \geq \int_{t_\varepsilon}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{c}{2} dt = +\infty.$$

On résulte que $\varphi \notin L^1(\mathbb{R}^+)$, cela contre dit l'hypothèse. ■

Lemme 5.2 [21] *Soit (u, v) une solution globale de (S_1), alors*

(**i**) $= \int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt < +\infty,$

(**ii**) $= \int_{Q_T} \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 dxdt < +\infty.$

Preuve. [21] Soit $F = [0, +\infty[\times \partial\Omega$.

Multipliant la première équation du système (S_1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et intégrant sur Q_T, on obtient

$$\int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt - d_1 \int_{Q_T} \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dxdt = -\int_{Q_T} f(u, v) \frac{\partial u}{\partial t} dxdt.$$

Par une simple usage de formule de Green, on obtient

$$\int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt - \left[d_1 \int_F \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \nabla u dt - d_1 \int_{Q_T} \nabla u \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dxdt \right] = -\int_{Q_T} f(u, v) \frac{\partial u}{\partial t} dxdt,$$

ce implique que

$$\int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \frac{d_1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - |\nabla u_0|^2\right) dx = -\int_{Q_T} f(u, v) \frac{\partial u}{\partial t} dxdt,$$

alors

$$\int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq \frac{d_1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_{Q_T} \left| f(u, v) \frac{\partial u}{\partial t} \right| dxdt.$$

Maintenant, on applique l'inégalité $\frac{|k|^2 + |h|^2}{2} \geq |kh|$, et posons $k = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $h = f(u, v)$, on obtient

$$\int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq \frac{d_1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} |f(u, v)|^2 dxdt.$$

On résulte que

$$\int\limits_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq d_1 \int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx + \int\limits_{Q_T} |f\,(u,v)|^2 \, dxdt.$$

Depuis $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^\infty([0,T^*), L^p(\Omega))$, on déduit que

$$\int\limits_{Q_T} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq \infty,$$

et de la même manière, on déduit que

$$\int\limits_{Q_T} \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq \infty.$$

Cela prouve le lemme.

Selon le lemme (5.1), posons

$$\varphi : t \to \varphi(t) = \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

pour obtenir par le lemme (5.2)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = 0. \tag{5.14}$$

Maintenant, nous pouvons le principal résultat du théorème (5.2), avec l'aide des deux lemmes précédents. ■

Preuve. du théorème (5.2) [21]

Les chemins $\{u(t),\ t \geq 0\}$ et $\{v(t),\ t \geq 0\}$ associés au système (S_1) sont précompact dans l'espace de Banach $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, choisissons une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini quand $t \to +\infty$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} u(t_n,x) = u_s \ \text{ dans } C(\overline{\Omega}),$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} v(t_n,x) = v_s \ \text{ dans } C(\overline{\Omega}).$$

Etant donné que la fonction f est continue, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} f\,(u(t_n,x), v(t_n,x)) = f\,(u_s,v_s) \ \text{ dans } C(\overline{\Omega}).$$

Par (5.14), le système (S_1) devient à l'infini un système elliptique (S_∞), de la forme

$$\begin{cases} -d_1\Delta u_s = -f\,(u_s,v_s) \ \text{ dans } C(\overline{\Omega}) \\ -\,d_2\Delta v_s = f\,(u_s,v_s) \ \text{ dans } C(\overline{\Omega}). \end{cases} \tag{S_∞}$$

Avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u_s}{\partial \eta} = \frac{\partial v_s}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{5.15}$$

Multiplions la première équation de système (S_∞) par u_s et intégrant sur Ω et par l'utilisation de formule de Green, on obtient

$$d_1 \int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = -\int_\Omega f(u,v)\, u_s dx,$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = 0 \Rightarrow \nabla u_s = 0 \Rightarrow u_s = k_1,$$

tel que k_1 est une constante.

D'autre part, la fonction v_s vérifiée le problème homogène de **Newman** suivant

$$\begin{cases} \Delta v_s = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial v_s}{\partial \eta} = 0 \text{ dans } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.16}$$

Sa solution est $v_s = k_2$ où k_2 est une constante.

Etant donné que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2_+$ à l'infini on obtient $f(k_1, k_2) = 0$ la suite $(t_n)_{n\in N}$ et arbitraire, alors

$$\|u - k_1\|_\infty \to 0 \text{ quand } t \to \infty,$$

et

$$\|u - k_2\|_\infty \to 0 \text{ quand } t \to \infty.$$

Depuis l'inclusion $C(\overline{\Omega}) \to L^1(\overline{\Omega})$ est continue.

On déduit que

$$\int_\Omega [u(t,x) + v(t,x)]\, dx \to |\Omega| (k_1 + k_2). \tag{5.17}$$

La convergence dans $L^1(\overline{\Omega})$ est évident puis que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u(t,x) dx \leq 0,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega v(t,x) dx \geq 0,$$

alors $\int_\Omega u(t,x)dx$ est une fonction décroissante de t et $\int_\Omega v(t,x)dx$ est une fonction croissante de t, mais u est non négative et v est borné alors $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)dx$ et $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(t,x)dx$ converge dans le temps et de (5.17) nous déduisons

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \left[u(t,x) + v(t,x)\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[u_0(x) + v_0(x)\right] dx. \end{aligned}$$

■

5.2.2 Exemple d'un système à matrice triangulaire

Nous considérons le système de Réaction-Diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\triangle u = -\lambda f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\triangle u - c\triangle v = \mu f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \end{cases} \tag{5.18}$$

Avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{5.19}$$

et les données initiales

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x) \text{ sur } \Omega. \tag{5.20}$$

Où Ω est un domaine borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$. a, b et c constantes positives, tel que $a > c$.
Les données initiales sont supposées dans la région

$$\Sigma = \left\{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } u_0 \geq 0,\ v_0 \geq 0\right\}.$$

La fonction $f(r,s)$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est positive avec $f(0,s) = 0$, pour tout $s \geq 0$ et

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{\ln(1+f(r,s))}{s}\right] < \alpha^* \text{ pour tout } r \geq 0,$$

$$\text{où } \alpha^* = \frac{2ac}{n\|u_0\|(a-c)^2}\min\left\{\frac{\lambda}{\mu}, \frac{a-c}{b}\right\}. \text{ [31]}$$

Théorème 5.3 [31] *Soit* $\{S(t),\ t \geq 0\}$ *un semi-groupe non linéaire sur espace métrique compact* X. *Si*

$$x_0 \in X, \gamma(x_0) = \{S(t)\, x_0,\ t \geq 0\},$$

est l'orbite à travers x_0, *alors l'ensemble w-limite pour* x_0 *est défini par*

$$\omega(x_0) = \{x \in X \,/\, \text{il existe } t_n \to +\infty \text{ tel que } S(t_n)\, x_0 \to x\}.$$

Lemme 5.3 [31] *Soit* ω *la solution du système* (5.18)-(5.20) *nous avons*

(**i**) $\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^2\, dxdt < +\infty,$

(**ii**) $\int\limits_{Q_T} |\nabla v|^2\, dxdt < +\infty.$

Preuve. [31] Intégrons la première équation de systéme (5.18) sur Q_T on obtient

$$\int\limits_{Q_T} f(u,v)\, dxdt < +\infty.$$

Multiplions la première équation de système (5.18) par u et intégrons sur Q_T, on obtient

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t} u\frac{\partial u}{\partial t} dtdx - a\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} u\Delta u dxdt = -\lambda\int\limits_{Q_T} f(u,v)\, dxdt,$$

par utilisation de formule de **Green,** on obtient

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(u^2 - u_0^2\right) dx + a\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^2\, dxdt = -\lambda\int\limits_{Q_T} f(u,v)\, dxdt,$$

on déduit que

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx + 2a\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^2\, dxdt \leq \int\limits_{\Omega} u_0^2 dx.$$

D'où

$$\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^2\, dxdt < +\infty.$$

Pour prouver (**ii**), nous multiplions la deuxième équation de (5.18) par v et intégrons sur Q_T, on obtient

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(v^2 - v_0^2\right) dx + b\int\limits_{Q_T} \nabla u\nabla v dxdt + c\int\limits_{Q_T} |\nabla v|^2\, dxdt = \mu\int\limits_{Q_T} f(u,v)\, dxdt.$$

$$\int_{\Omega} v^2 dx + 2a \int_{Q_T} \nabla u \nabla v dx dt + 2c \int_{Q_T} |\nabla u|^2 dx dt = 2\mu \int_{Q_T} f(u,v) dx dt + \int_{\Omega} u_0^2 dx.$$

On utilise l'inégalité $2\rho\varsigma \leq \varepsilon\rho^2 + C(\varepsilon)\zeta^2$ et $(\mathbf{i})$, nous obtenons

$$\int_{Q_T} |\nabla v|^2 dx dt < +\infty.$$

■

Théorème 5.4 [31] *Si $\lambda = \mu = 1$, la solution ω du système (5.18)-(5.20) converge à un vecteur constant de la forme $k = (k_1, k_2)$ lorsque $t \to +\infty$, uniformément en $\overline{\Omega}$.*

En outre, nous avons

$$k_1 \geq 0, \ k_2 \geq 0 \quad f(k_1, k_2) = 0,$$

et

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) dx.$$

Preuve. [31] Sommons les équations de (5.18), et intégrons sur Q_T

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx dt - (a+b) \int_{Q_T} \Delta u dx dt - c \int_{Q_T} \Delta v dx dt = 0,$$

et par **Green** nous obtenons

$$\int_{\Omega} u(t,x) + v(t,x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) + v_0(x) dx. \tag{5.21}$$

$\bigcup_{t\geq 0} \{u(t)\}$ et $\bigcup_{t\geq 0} \{v(t)\}$ sont précompacts dans $C(\Omega)$, il existe une suite $\{t_n\}$, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u(t_n, x) = u_s \qquad \text{dans } C(\overline{\Omega}), \tag{5.22}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} v(t_n, x) = v_s \qquad \text{dans } C(\overline{\Omega}). \tag{5.23}$$

Maintenant, notons par $\omega(u_0, v_0)$ l'ensemble ω-limite pour (u_0, v_0) et φ l'ensemble des solution du système elliptique (5.24)

$$\begin{cases} -a\Delta u_s = -f(u_s, v_s) & \text{dans } C(\overline{\Omega}), \\ -bu_s - cv_s = f(u_s, v_s) & \text{dans } C(\overline{\Omega}). \end{cases} \tag{5.24}$$

Avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u_s}{\partial \eta} = \frac{\partial v_s}{\partial \eta} = 0.$$

Multiplions la première équation du système (5.24) par u_s et intégrons sur Ω, on obtient

$$a \int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = - \int_\Omega f(u_s, v_s) \, dx,$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = 0 \ \Rightarrow \nabla u_s = 0 \Rightarrow u_s = k_1.$$

Sommons les deux équations de (5.24), multiplions le résultat par v_s, et intégrons sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v_s|^2 \, dx = 0 \Rightarrow \nabla v_s = 0 \Rightarrow v_s = k_2,$$

c'est clair que

$$f(k_1, k_2) = 0. \tag{5.25}$$

Nous allons montrer

$$w(u_0, v_0) \equiv \varphi.$$

C'est clair que $w(u_0, v_0) \neq \emptyset$. Maintenant, $\forall x \in \Omega$, $\sigma \in]-1, +1[$, et soit

$$p_n(x, \sigma) = u(x, t_n + \sigma) \ \text{ et } \ q_n(x, \sigma) = v(x, t_n + \sigma).$$

Comme $u_t \in L^2(t_0, +\infty; L^2(\Omega))$ (seulement multiplions la première équation de (5.18) par u_t et intégrons), nous avons $\forall \sigma \in]-1, +1[$

$$\begin{aligned} p_n(x, \sigma) - u(x, t_n) &= \int_{t_n}^{t_n + \sigma} u_t(x, t) dt \\ &\leq \int_{t_n - 1}^{t_n + 1} u_t(x, t) dt \\ &\leq \sqrt{2} \left(\int_{t_n - 1}^{t_n + 1} (u_t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\int_\Omega |p_n(x, \sigma) - u(x, t_n)|^2 \, dx \leq 2 \int_\Omega \int_{t_n - 1}^{t_n + 1} (u_t)^2 dt dx \to 0.$$

Alors

$$\sup_{-1\leq\sigma\leq1}\|p_n(x,\sigma)-u_s\|_2\to 0,$$

et

$$\sup_{-1\leq\sigma\leq1}\|p_n(x,\sigma)-v_s\|_2\to 0.$$

Aussi nous pouvons avoir

$$\sup_{-1\leq\sigma\leq1}\|\nabla p_n(x,\sigma)-\nabla u_s\|_2\to 0,$$

et

$$\sup_{-1\leq\sigma\leq1}\|\nabla q_n(x,\sigma)-\nabla v_s\|_2\to 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(x,t_n+\sigma)\leq M,\\ 0 &\leq v(x,t_n+\sigma)\leq N. \end{aligned}$$

Comme f continue on peut écrire

$$f\left(p_n(x,\sigma),q_n(x,\sigma)\right)\to f\left(u_s,v_s\right).$$

Maintenant, soient $\xi_i\in C^1(\overline{\Omega})$ telles que $\xi_i=0$ sur $\partial\Omega$ $i=1,2$, et $\rho\in C^1(\overline{\Omega})$ telles que supp$\rho\subset[-1,1]$,

$$\int_{-1}^{+1}\rho(s)ds=1,\quad \rho(-1)=\rho(+1).$$

Si nous multiplions la première équation de (5.18) par $\rho(t-t_n)\xi_1$, et la deuxième équation de (5.18) par $\rho(t-t_n)\xi_2$ et intégrons sur $(t_n-1,t_n+1)\times\Omega$, nous obtenons

$$\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_{\Omega}\left\{\rho'(t-t_n)\xi_1u-a\nabla u\nabla\xi_1\rho(t-t_n)-f(u,v)\xi_1\rho(t-t_n)\right\}dxdt=0,$$

et

$$\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_{\Omega}\left\{\rho'(t-t_n)\xi_2v-c\nabla u\nabla\xi_2\rho(t-t_n)-b\nabla u\nabla\xi_2\rho(t-t_n)+f(u,v)\xi_2\rho(t-t_n)\right\}dxdt=0.$$

posons $\sigma=t-t_n$, nous avons

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\left\{\rho'\left(\sigma\right)\xi_1p_n\left(x,\sigma\right)-a\nabla p_n\nabla\xi_1\rho\left(\sigma\right)-f\left(p_n,q_n\right)\xi_1\rho\left(\sigma\right)\right\}dxd\sigma=0,\\ \displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\left\{\rho'\left(\sigma\right)\xi_2q_n\left(x,\sigma\right)-c\nabla q_n\nabla\xi_2\rho\left(\sigma\right)-b\nabla p_n\nabla\xi_2\rho\left(\sigma\right)+f\left(p_n,q_n\right)\xi_1\rho\left(\sigma\right)\right\}dxd\sigma=0. \end{cases}$$

Maintenant utilisant le théorème de Lebesgue nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\rho'(\sigma)\,\xi_1(x)\,p_n(x,\sigma)\,dxd\sigma &= \int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\rho'(\sigma)\,\xi_1(x)\,u_s dxd\sigma\\ &= \int_{-1}^{+1}\rho'(\sigma)\,d\sigma\times\int_{\Omega}\xi_1(x)\,u_s dx\\ &= 0,\end{aligned}$$

car $\rho(-1)=\rho(+1)$. Aussi, nous pouvons avoir

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{\Omega}\rho'(\sigma)\,\xi_2(x)\,q_n(x,\sigma)\,dxd\sigma=0.$$

L'autre terme

$$\int_{\Omega}\{a\nabla u_s\nabla\xi_1+f(u_s,v_s)\,\xi_1\}\,dx=0,$$

et

$$\int_{\Omega}\{c\nabla v_s\nabla\xi_2+b\nabla u_s\nabla\xi_2-f(u_s,v_s)\,\xi_2\}\,dx=0.$$

Lequel est la formulation variationnel de (S), d'où $\varphi=\omega$. Finalement

$$k_1+k_2=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}(u_0(x)+v_0(x)).$$

■

Conclusion

On a étudie dans ce mémoire l'existence de solutions d'équations d'évolution, et quelques système de réaction-diffusion (à matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice pleine), ainsi que quelques propriétés de ces solutions.
Une extension éventuelle de ce travail est l'étude des équations d'évolution du type hyperbolique.

Bibliographie

[1] **A. Freidman**, Partial differentiable equations of parabolic type. Robert E. Krieger publishing company Malabar, Florida, 1983.

[2] **A. Munnier**, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy 1, B. P, 2007-2008.

[3] **A. Pazy**, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer- Verlag New York, Inc, 1983.

[4] **A. Haraux et T. Cazenave**, An Introduction to Semilinear Evolution Equations. CNRS and University of Paris VI, France,1998.

[5] **B. Rabiaa**, Existence globale de solution de système Réaction-Diffusion. Mémoire de master encadré par Mr. A. Toualbia, Université de Tebessa, Juin 2012.

[6] **B. Rebiai**, Global classical solutions for reaction-diffusion systems with a triangular matrix of diffusion coefficients. Electronic journal of differential equations, August 2011.

[7] **B. Rebiai and B. Saïd**, Global classical solutions for reaction-diffusion systems with nonlinearities of exponential growth. Springer Basel AG, 2010.

[8] **D. Henry**, Geometric Theory of semi linear parabolic equations. Lecture Notes in Mthematics 840, springer-verlag Berlin Heidelberg New York 1981.

[9] **E. Dumos et R. Joly**, Introduction aux EDP d'évolution. Université de Grenoble.

[10] **E. Gallais**, Rappels d'analyse fonctionnelle. Exposé au séminaire des apprenis, 2006.

[11] **F. Boyer**, Analyse Fonctionnelle. Aix-Marseille Université, 13 décembre 2015.

[12] **F. Dardalhon et F. Verga**, Le théorème de Hille Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires. Mémoire encadré par Florence Hubert, 7 juin 2006.

[13] **F. R. Grantmacher**, The theory of matrices. Chelsea publishing company New York, N. Y, 1959.

[14] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1987.

[15] **H. kamel**, cour 1ère Année Master. Université de tebessa.

[16] **H. Fujita**, On the blowing up of solutions of the cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. University of Tokyo, July 15, 1966.

[17] **J. P. Raymond**, Équation d'évolution. Université Paul Sabatier.

[18] **J. Smaller**, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] **M. Mebarki and A. Moumeni**, Global solution of reaction diffusion system with full matrix. Department of mathematics, Badji Mokhtar University, Annaba-Algeria, 2015.

[20] **M. R. Spiegel**,Théorie et applications de L'analyse (1982).

[21] **M. Yahi and K. Saoudi**, Asymptotic Behavior for solution of reaction-diffusion systems. Journal of mathematics and statistics 3 (3) : 88-92, 2007.

[22] **N. Alikakos**, LP Bounds of solutions of reaction-diffusion equations. Communication in partial differential equations, January 1979.

[23] **P. Bernard**, Espace de Banach. 21 novembre 2013.

[24] **P. Bérard**, Espace de Sobolev Résumé du cours de MEDP. Institut Fourier, UMR 5582 UJF-CNRS, 2001-2002.

[25] **P. Chartier et E. Faou**, Chapitre 2 théorème généraux, 2 octobre 2012.

[26] **R. A. Fisher**, The wave of advance of advantagerous genes, 1937.

[27] **S. A. Messaoudi**, A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy. J. Math. Anal. Appl. 273 (2002) 243-247, 17 semptembre 2001.

[28] **S. Ridha**, Mémoire de Magister sur l'explosion en temps fini des solutions de certains systèmes d'équation paraboliques dégénérées. Sous la direction de Dr. NISSE Lamine, université d'Annaba, 2010-2011.

[29] **T. Lelièvre**, Equation aux dérivées partielles. 2009-2010.

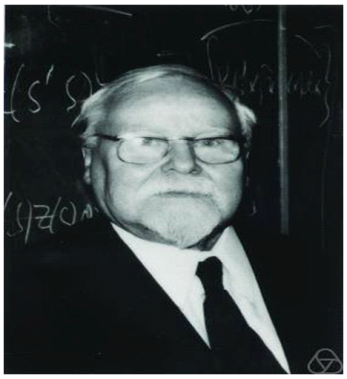
[30] Topologie, Analyse Fonctionnelle.

[31] **Z. Abderrahmene**, cour d 'équation d'evolution 2ème Année Master. Université de tebessa.



LIAPOUNOV ALEXANDRE MIKHAÏLOVITCH

Naissance : 6 Juin 1857.
Décès : 3 Novembre 1918.
Nationalité : Russe.
Livre : Problème général de la stabilité du mouvement.
Il a crée une théorie moderne rigoureuse de la stabilité et du mouvement des systèmes mécaniques déterminés par un nombre fini de paramètres.
En physique mathématique, Liapounov s'est intéressé au problème de Dirichlet, où sa contribution essentielle concerne le potentiel de double couche (ou de dipôles) et le comportement des dérivées de la solution près de la surface limite. Il démontre le premier la symétrie de la fonction de Green, qui intervient dans la solution.



Anderey NIKOLAYEVICH TIKHONOV

Naissance : 30 Octobre 1906.
Décès : 7 Octobre 1993.
Nationalité : Russe.
Il a travaillé dans un certain nombre de domaines différents en mathématiques. Il a fait des contributions importantes à la topologie, l'analyse fonctionnelle, la physique mathématique, et certaines classes de problèmes mal posés. En physique mathématique, il a prouvé les théorèmes d'unicités fondamentales pour l'équation de la chaleur et il a étudié les équations intégrales de Volterra.



Elberhard Frederich Ferdinand Hopf

Naissance : 04 Avril 1902.
Décès : 24 Juillet 1983.
Nationalités : Américain, Autrichien, Allemand.
Eberhard Hopf est un mathématicien autrichien, né à Salzburg, Il a effectué la plupart de ses études en Allemagne (**PhD** de mathématiques en **1926**, Habilitation en astronomie mathématique à l'université de Berlin en **1929**).
Le premier résultat de **Elberhard Hopf** est le principe de maximum en **1927** qui est l'une des techniques les plus importantes dans la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques.

.